以下の問いに答えよ。

(1) 連立不等式 $x \geqq 2$，$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし，自然対数の底 e が $2<e<3$ をみたすことを用いてよい。

(2) $a>0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y-2^x)(x^a-x^y) \geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

＜ ’22 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **与えられた不等式を ☆$\leqq y \leqq$★ の形を目指して変形していくことになります。**

辺々自然対数をとり，整理していくと

$$\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \leqq y \leqq 2$$

までほぐせるでしょう。

最左辺の関数 $\log 2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ **の概形を調べるために** $f(x)=\log 2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ **として，微分してグラフの概形を Get することに注力します。**

(2) **題意の不等式は** $\begin{cases} x^y-2^x \geqq 0 \\ x^a-x^y \geqq 0 \end{cases}$ **または** $\begin{cases} x^y-2^x \leqq 0 \\ x^a-x^y \leqq 0 \end{cases}$

であり，これを整理すると

$$\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \leqq y \leqq a \quad \text{または} \quad a \leqq y \leqq \log 2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

までは一直線です。

(1) で調べた $f(x)$ のグラフの概形がここでも使えます。

a によって $y=a$ と $y=f(x)$ の上下関係が異なってくるため，$S(a)$ を与える式が異なりますから，場合分けが発生します。

その際， $\displaystyle\int_{\bigcirc}^{\square}\{f(x)-a\}\,dx$ **，あるいは** $\displaystyle\int_{\triangle}^{\diamond}\{f(x)-a\}\,dx$ **という形の積分計算が求められますが，** $\Big[F(x)-ax\Big]_{\bigcirc}^{\square}=(\text{定数})-(\text{定数})a$

という a の 1 次関数であるため，増減自体ははっきりしています。

【解答】

(1) $2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の辺々自然対数をとると

$$x\log 2 \leqq y\log x \leqq 2\log x$$

$x \geqq 2$ に対し，$\log x \geqq \log 2 > \log 1\ (=0)$ であるから
辺々 $\log x$ で割ると

$$\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \leqq y \leqq 2 \quad \cdots ①$$

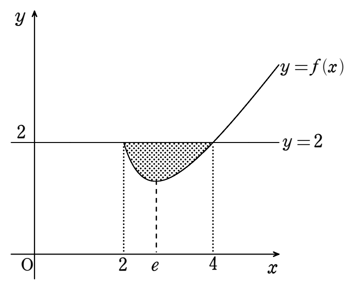
よって，不等式 ① が表す領域を図示すればよい。

$f(x)=\log 2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ とする。

$$f'(x)=\log 2 \cdot \frac{1\cdot(\log x)-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}$$
$$=\log 2 \cdot \frac{\log x-1}{(\log x)^2}$$

x	2	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$e\log 2$	↗	∞

よって，不等式 ① が表す領域は以下の (図 1) の打点部。
(ただし，境界線は含む。)



(図 1)

(2) $\begin{cases} x^y-2^x \geqq 0 \\ x^a-x^y \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^y-2^x \leqq 0 \\ x^a-x^y \leqq 0 \end{cases}$

すなわち，$2^x \leqq x^y \leqq x^a$ または $x^a \leqq x^y \leqq 2^x$

(1) 同様，辺々自然対数をとって整理すると

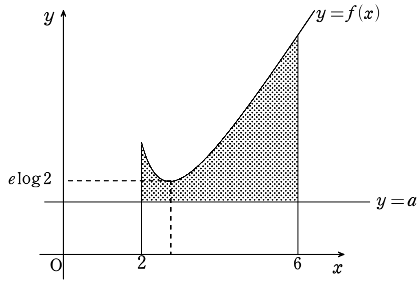
$$\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \leqq y \leqq a \quad \text{または} \quad a \leqq y \leqq \log 2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

ゆえに，

$$\begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ f(x) \leqq y \leqq a \ \text{または}\ a \leqq y \leqq f(x) \end{cases} \quad \cdots ②$$

不等式 ② が表す領域について考える。

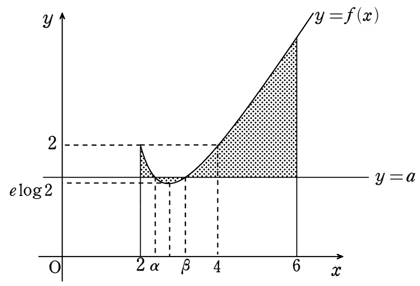
[1]　$0<a \leqq e\log 2$ のとき



(図 2)

② が表す領域は (図 2) の打点部で，その面積 $S(a)$ は
この範囲では a について単調減少である。

[2]　$e\log 2 \leqq a \leqq 2$ のとき



(図 3)

② が表す領域は (図 3) の打点部で，その面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_2^{\alpha}\{f(x)-a\}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{a-f(x)\}\,dx+\int_{\beta}^{6}\{f(x)-a\}\,dx$$

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$S(a)=\Big[F(x)-ax\Big]_2^{\alpha}+\Big[ax-F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}+\Big[F(x)-ax\Big]_{\beta}^{6}$$

$$=F(\alpha)-F(2)-a(\alpha-2)+a(\beta-\alpha)-F(\beta)+F(\alpha)$$
$$+F(6)-F(\beta)-a(6-\beta)$$

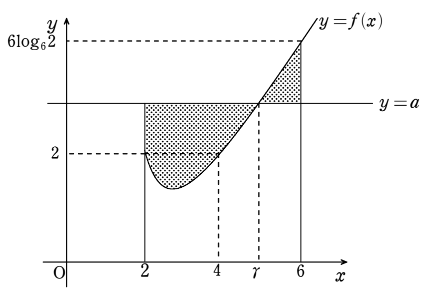
$$=2(\beta-\alpha-2)a+2F(\alpha)-2F(\beta)+F(6)-F(2)$$

ゆえに，$S'(a)=2(\beta-\alpha-2)$

(図 3) より，$2\leqq\alpha\leqq\beta\leqq 4$ であるため，$\beta-\alpha\leqq 4-2(=2)$

したがって，$S'(a)\leqq 0$ であり，この範囲で $S(a)$ は単調減少。

[3]　$2\leqq a \leqq 6\log_6 2$ のとき



(図 4)

② が表す領域は (図 4) の打点部で，その面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_2^{\gamma}\{a-f(x)\}\,dx+\int_{\gamma}^{6}\{f(x)-a\}\,dx$$

$$=\Big[ax-F(x)\Big]_2^{\gamma}+\Big[F(x)-ax\Big]_{\gamma}^{6}$$

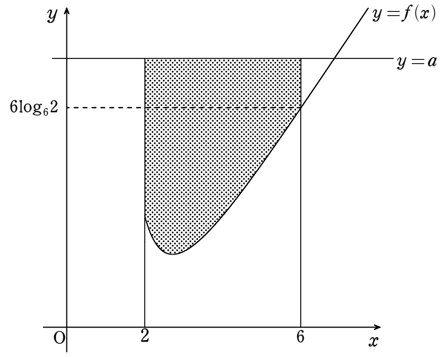
$$=a(\gamma-2)-F(\gamma)-F(2)+F(6)-F(\gamma)-a(6-\gamma)$$

$$=2(\gamma-4)a-2F(\gamma)+F(6)-F(2)$$

$S'(a)=2(\gamma-4)$

(図 4) より，$4\leqq\gamma\leqq 6$ であり，$S'(a)\geqq 0$ となり，この範囲で $S(a)$ は単調増加。

[4]　$a\geqq 6\log_6 2$ のとき



(図 5)

② が表す領域は (図 5) の打点部で，その面積 $S(a)$ は
この範囲では a について単調増加である。

以上 [1], [2], [3], [4] から，$S(a)$ は $a>0$ の範囲において

$$\begin{cases} 0<a\leqq 2 & \text{の範囲で減少} \\ 2\leqq a & \text{の範囲で増加} \end{cases}$$

$S(a)$ は $a>0$ の範囲で連続であるため，$S(a)$ を最小にする a の値は

$a=2$ … 答

【総括】

「$\dfrac{x}{\log x}$ の積分をどうしよう」と，将来 $S(a)$ を計算したら定数になる部分（$S(a)$ の増減に影響しない部分）にとらわれすぎてしまい，はまってしまったという受験生も一定数いると思います。

本問はそれなりに処理量があり，決して簡単ではありません。

試験場での出来もよくはないでしょう。

ただ、

①：見るべき部分を見て，急所を掴むことの大切さ

②：① の見るべき部分が見えるようにするためには基本が大切であるということ

これらを教訓とする教材として，今後の糧になる問題です。

① については例えば【解答】の [2] で

$$S(a)=\int_2^{\alpha}\{f(x)-a\}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{a-f(x)\}\,dx+\int_{\beta}^{6}\{f(x)-a\}\,dx$$

が登場しましたが，

『 x というのは「器の文字」（最終的に定数をぶち込まれる器）であり，a を変数と見ている今は影響ない部分である 』

というところが急所です。

② で述べたように，このような急所が見えるためには

・積分変数という基本用語を上記のように落とし込めているかどうか。
・積分変数が器の文字であるということについては定積分の計算の原理を考えれば当然であるということ。

という基本が大切ですし，このような基本を
無意識レベルで意識できるかどうか
が「聞けば分かる」という殻を破り，「自力でできる」というステージにいくために鍛えなければならない部分だと思います。