$a$ は $a\neq 1$ をみたす正の実数とする。

$xy$ 平面上の点 $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，…，$\mathrm{P}_n$，…および $\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{Q}_2$，…，$\mathrm{Q}_n$，…が，すべての自然数 $n$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=(1-a)\,\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n},\quad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また，$\mathrm{P}_n$ の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。

(1) $x_{n+2}$ を $a$，$x_n$，$x_{n+1}$ で表せ。

(2) $x_1=0$，$x_2=1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $y_1=\dfrac{a}{(1-a)^2}$，$y_2-y_1=1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

＜ '22 北海道大 ＞

**【戦略】**

**ベクトルで表現されていますが，要するに $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ という 2 種類の数列に関する漸化式が与えられているということに他なりません。**

**座標と，ベクトルの成分を結びつけるためには，当然与えられた条件式を全て始点を O として書き換えて整理していきます。**

(1)
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(1-a)\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right) & \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\end{pmatrix} & \cdots ②\end{cases}$$

**から，① の番号を上げて $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}$ を登場させ，そこから，辺々引くことで解決します。**

(2) **(1) から得られる結論** $x_{n+2}=(a+1)\,x_{n+1}-ax_n$ **を**

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a\,(x_{n+1}-x_n)$$

**と見ることになります。**

**これは (1) の途中経過である**

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=a\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)+(1-a)\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\right)$$

**という式を見ればインスピレーションしやすいでしょう。**

**これにより，$x_{n+1}-x_n$ が求まりますから，$x_n$ については階差数列の処理で片付きます。**

(3) **(1) の経過過程から得られる** $y_{n+2}=(a+1)y_{n+1}-ay_n+a^{-n}$ **を処理していくことになります。**

**ひとまずは** $y_{n+2}-y_{n+1}=a\,(y_{n+1}-y_n)+a^{-n}$

$$z_{n+1}=az_n+a^{-n}\quad (z_n=y_{n+1}-y_n)$$

**と，心霊写真型**

（$a_{n+1}=pa_n+q$ **という基本漸化式に対して**

**肩になんか乗ってる**

$a_{n+1}=pa_n+q^n$ **というタイプ**）

**の処理となります。**

$a^{-(n+1)}$ **で割る（$a^{n+1}$ をかける）という除霊により $z_n$ を捌き，その後は階差数列の処理となります。**

【解答】

(1) 原点を O とすると，与えられた関係式は

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(1-a)\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right) & \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\end{pmatrix} & \cdots ②\end{cases}$$

① より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+(1-a)\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ …①′

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}+(1-a)\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}$ …①″

①″－①′ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=a\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)+(1-a)\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}=(a+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-a\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+(1-a)\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_{n+2}\\ y_{n+2}\end{pmatrix}&=(a+1)\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}+(1-a)\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(a+1)x_{n+1}-ax_n\\ (a+1)y_{n+1}-ay_n+a^{-n}\end{pmatrix}\ \cdots(*)\end{aligned}$$

ゆえに，$x_{n+2}=(a+1)\,x_{n+1}-ax_n$ …㊟

(2) (1) より，$x_{n+2}-x_{n+1}=a\,(x_{n+1}-x_n)$

よって

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=(x_2-x_1)\cdot a^{n-1}\\ &=a^{n-1}\end{aligned}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}x_n&=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}a^{k-1}\\ &=\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\ \cdots(☆)\end{aligned}$$

(☆) に $n=1$ を代入すると，$x_1=\dfrac{1-a^0}{1-a}=0$ となり，(☆) は $n=1$ のときも正しい結果を与える。

以上から，$x_n=\dfrac{1-a^{n-1}}{1-a}$ …㊟

(3)　(*)より，$y_{n+2}=(a+1)y_{n+1}-ay_n+a^{-n}$

$y_{n+2}-y_{n+1}=a(y_{n+1}-y_n)+a^{-n}$

$z_n=y_{n+1}-y_n$ とおくと，$z_{n+1}=az_n+a^{-n}$

両辺 $a^{n+1}$ をかけると，$a^{n+1}z_{n+1}=a^2\cdot a^n z_n+a$

$a^n z_n=w_n$ とおくと，$w_{n+1}=a^2 w_n+a$

$a>0\ (a\fallingdotseq 1)$ より，$w_{n+1}-\dfrac{a}{1-a^2}=a^2\left(w_n-\dfrac{a}{1-a^2}\right)$

$$\begin{aligned}
w_n-\frac{a}{1-a^2}&=\left(w_1-\frac{a}{1-a^2}\right)\cdot(a^2)^{n-1}\\
&=\left(az_1-\frac{a}{1-a^2}\right)\cdot a^{2n-2}\\
&=\left(a-\frac{a}{1-a^2}\right)\cdot a^{2n-2}\quad(\because z_1=y_2-y_1=1)\\
&=a^{2n-1}-\frac{a^{2n-1}}{1-a^2}
\end{aligned}$$

よって　$w_n=\dfrac{a}{1-a^2}+a^{2n-1}-\dfrac{a^{2n-1}}{1-a^2}$，すなわち

$$\begin{aligned}
a^n z_n&=\frac{a}{1-a^2}+a^{2n-1}-\frac{a^{2n-1}}{1-a^2}\\
&=\frac{a}{1-a^2}+a^{2n-1}\left(1-\frac{1}{1-a^2}\right)\\
&=\frac{a}{1-a^2}+a^{2n-1}\cdot\frac{(1-a^2)-1}{1-a^2}\\
&=\frac{a}{1-a^2}-a^{2n-1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ z_n=\frac{a}{1-a^2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n-\frac{a^2}{1-a^2}\cdot a^{n-1}$$

ゆえに，$y_{n+1}-y_n=\dfrac{1}{1-a^2}\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}-\dfrac{a^2}{1-a^2}\cdot a^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$$y_n=y_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1}-\frac{a^2}{1-a^2}\cdot a^{k-1}\right\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{a}}-a^2\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\right\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{a\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)}{a-1}-a^2\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\right\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{a}{1-a}\left\{\left(\frac{1}{a^{n-1}}-1\right)-a(1-a^{n-1})\right\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1}{(1-a)^2}\cdot\frac{a}{1+a}\{a^{1-n}-1-a+a^n\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}\left\{1+\frac{1}{1+a}(a^{1-n}-1-a+a^n)\right\}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}\cdot\frac{(1+a)+(a^{1-n}-1-a+a^n)}{1+a}$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}\cdot\frac{a^{1-n}+a^n}{1+a}\quad\cdots(★)$$

(★)に $n=1$ を代入すると

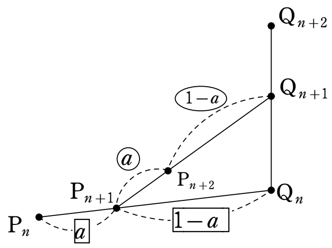
$y_1=\dfrac{a}{(1-a)^2}\cdot\dfrac{(a^{1-1}+a^1)}{1+a}=\dfrac{a}{(1-a)^2}$ となり，(★)は $n=1$ のときも正しい結果を与える。

以上から，$y_n=\dfrac{a(a^{1-n}+a^n)}{(1-a)^2(1+a)}$ …答

【総括】

条件式がベクトルで与えられているため，図形的な考察を試みようとしてしまうとかえって嵌まってしまいます。

図形的にこの点列の規則を追えなくもないですが，この問題を解くのに劇的に貢献するというわけでもなく，割り切って式で押し通すのがよいでしょう。




漸化式の処理自体は勉強していれば問題ないですが，計算量は多く，特に(3)の処理はそこそこ大変で，試験場で結果をバシッと合わせるのは難しいと思います。