$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす a，b に対し，関数

$$f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$$

を考える。x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする。

(1)　$x<0$ および $x>1$ では $f(x)>m$ となることを示せ。

(2)　$m=f(0)$ または $m=f(1)$ であることを示せ。

(3)　a，b が，$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ。

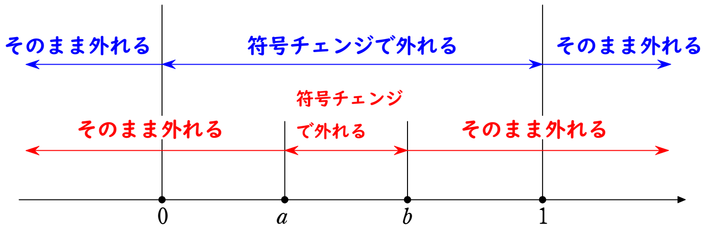
＜ '22 北海道大 ＞

【戦略 1】

$f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$ の各々の絶対値の外れ方については

$$\begin{cases} |x(x-1)| \text{ については } 0,\ 1 \text{ の外側か内側か} \\ |(x-a)(x-b)| \text{ については } a,\ b \text{ の外側か内側か} \end{cases}$$

で外れ方が変わってきます。



(1)　**$x<0$，$x>1$ の範囲ではどちらの絶対値もそのまま外れます。**

つまり，$f(x)=x(x-1)+(x-a)(x-b)$ ということになります。

展開して平方完成してもよいですが，微分で捌いた方が明確です。
(面倒だなと思えば，相手が 2 次関数でも微分で捌くことはよく使う手法です。)

今回，$f'(x)=0$ となる x の値 $x=\dfrac{a+b+1}{4}$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の間にいるため，$x>0$ の範囲では単調減少，$x>1$ の範囲では単調増加ということになります。

これにより，$f(x)>f(0) \geqq m$，$f(x)>f(1) \geqq m$ ということになり解決です。

(2)　**(1) から，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で最小となり得ることが分かります。**

したがって，上の絶対値の外れ方を整理しながら場合分けをして絶対値を外していきます。

グラフの概形を考えるのが直接的で分かりやすいでしょう。

(3)　**(2) の導出過程から m が** $m=\begin{cases} ab & (a+b \leqq 1 \text{ のとき}) \\ (1-a)(1-b) & (a+b \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

と得られます。

和の範囲が与えられている中で積の形の m の最大値を考えるのであれば，第一候補としては相加平均・相乗平均の関係でしょう。

【解 1】

(1)　$x<0$，$x>1$ の範囲では，

$$x(x-1)>0$$

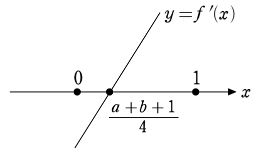
また，条件 $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ より，$x<0$，$1<x$ の範囲で

$$(x-a)(x-b)>0$$

ゆえに，$f(x)=x(x-1)+(x-a)(x-b)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot(x-1)+x\cdot 1+1\cdot(x-b)+1\cdot(x-a) \\ &= 4x-(a+b+1) \end{aligned}$$

条件 $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ より $0<\dfrac{a+b+1}{4}<1$ であるから



$x<0$ の範囲で $f'(x)<0$，$x>1$ の範囲で $f'(x)>0$

ゆえに，$\begin{cases} x<0 \text{ の範囲で } f(x) \text{ は単調減少} \\ x>1 \text{ の範囲で } f(x) \text{ は単調増加} \end{cases}$

ゆえに，$\begin{cases} f(x)>f(0) \geqq m \\ f(x)>f(1) \geqq m \end{cases}$ となり，$x<0$，$x>1$ の範囲で $f(x)>m$ が成り立つ。

(2)　(1) より $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で最小となり得る。

[1]　$0 \leqq x \leqq a$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-1)+(x-a)(x-b) \\ &= (1-a-b)x+ab \end{aligned}$$

[2]　$a \leqq x \leqq b$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-1)-(x-a)(x-b) \\ &= -2x^2+(1+a+b)x-ab \end{aligned}$$

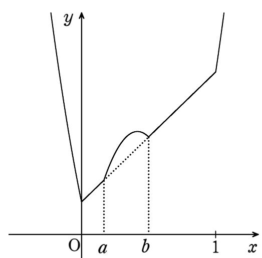
[3]　$b \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-1)+(x-a)(x-b) \\ &= (1-a-b)x+ab \end{aligned}$$

[1]，[3] のときの $f(x)$ は同じ式で与えられることに注意すると

(i)　$1-a-b \geqq 0$，すなわち $a+b \leqq 1$ のとき

$y=f(x)$ の概形は以下の (図 1) のようになる

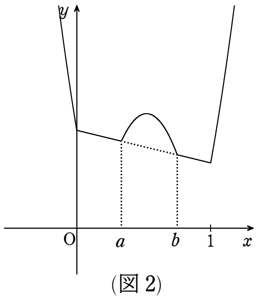


(図 1)

このとき，$m=f(0)$

(ii)　$1-a-b \leqq 0$，すなわち $a+b \geqq 1$ のとき

$y=f(x)$ の概形は以下の (図 2) のようになる



(図 2)

このとき，$m=f(1)$

以上 (i)，(ii) から $m=f(0)$ または $m=f(1)$ である。

(3)　(2) の導出過程から，

$$m=\begin{cases} ab & (a+b \leqq 1 \text{ のとき}) \\ (1-a)(1-b) & (a+b \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i)　$a+b \leqq 1$ のとき

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に対して，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$　で，$\sqrt{ab} \leqq \dfrac{a+b}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$

すなわち，$ab \leqq \dfrac{1}{4}$ を得る。

等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき

(ii)　$a+b \geqq 1$ のとき

条件 $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ より $1-a \geqq 0$，$1-b \geqq 0$ であるから
相加平均・相乗平均の関係を用いると

$(1-a)+(1-b) \geqq \sqrt{(1-a)(1-b)}$ で，

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-a)(1-b)} &\leqq \frac{(1-a)+(1-b)}{2} \quad \cdots (\text{A}) \\ &= \frac{2-(a+b)}{2} \\ &\leqq \frac{2-1}{2} \quad (\because a+b \geqq 1) \cdots (\text{B}) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(A) の等号成立条件は $1-a=1-b$，すなわち $a=b$
(B) の等号成立条件は $a+b=1$

ゆえに，$(1-a)(1-b) \leqq \dfrac{1}{4}$ で，等号は

$$a=b=\frac{1}{2}$$

のとき成立する。

以上 (i)，(ii) から，m は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき 最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる …答

【戦略 2】(3) について

独立 2 変数関数の最大値問題なので，予選決勝法も有力手段です。

下ごしらえとしては，(a, b) が動き得る領域を図示します。

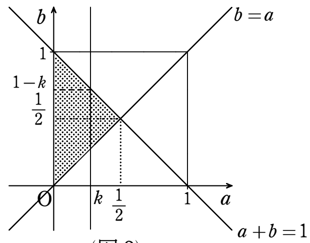
【解 2】(3) について

(2) の導出過程から，

$$m=\begin{cases} ab & (a+b \leqq 1 \text{ のとき}) \\ (1-a)(1-b) & (a+b \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i)　$a+b \leqq 1$ のとき

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ も併せると，(a, b) が動き得る領域は (図 3) の打点部。



(図 3)

a を固定し，b だけ動かすと，$m=ab$ より，b は大きい方が m は大きくなる。

ゆえに，$a=k$ $\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ と固定すると，$m \leqq k(1-k)$

次に，k を $0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ で動かすと

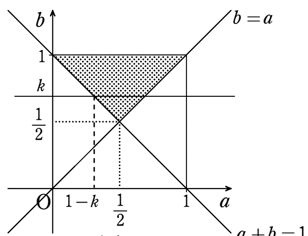
$$k(1-k)=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4} \quad \left(\text{等号成立は } k=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

これより，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ $\left(\text{等号成立は } a=b=\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right)$

(ii)　$a+b \geqq 1$ のとき

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ も併せると，(a, b) が動き得る領域は (図 4) の打点部。

b を固定し，a だけ動かすと，$m=(1-a)(1-b)$ より，a は小さい方が m は大きくなる



(図 4)

ゆえに，$b=k$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1\right)$ と固定すると，

$$\begin{aligned}m &\leqq \{1-(1-k)\}(1-k) \\ &= k(1-k)\end{aligned}$$

k の固定を外し，$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ で動かすと

$$k(1-k)=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4} \quad \left(\text{等号成立は } k=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

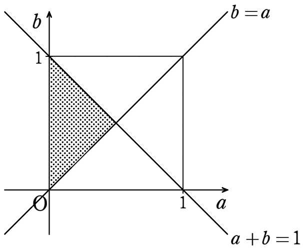
以上から，m は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき 最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる …答

【総括】

相手が所詮 2 次関数となめてかかると火傷するかもしれません。

整理の仕方により，細々とした別解が考えられますが，おおよその方向性は大きくは変わらないものです。

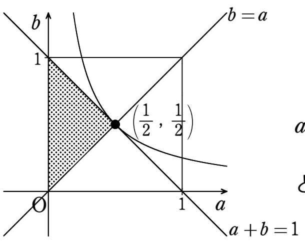
(3) は相加平均，相乗平均の関係，予選決勝法のほかにも



この領域と双曲線 $b=\dfrac{m}{a}$

が共有点をもつ m の最大値を求める

という方針で



$a=b=\dfrac{1}{2}$ で m は最大値 $\dfrac{1}{4}$

と捌いていくことも考えられます。

これは独立 2 変数の最大最小問題の常套手段の 1 つである

$m=1$ になるかな？　$m=2$ になるかな？　……

　　　　$m=k$ になるかな？なれるとしたらどんな k かな？

という「逆像法」の考え方です。

$m=k$ になれるかどうかは，$\begin{cases} ab=k \\ 0\leqq a\leqq b\leqq 1 \\ a+b\leqq 1 \end{cases}$ を同時に満たす $(a\,,\ b)$ があるかどうかにかかってくるため，上記の領域と $b=\dfrac{k}{a}$ が共有点をもつかどうかという話になってきます。(文字は別に k でなくてもいいので，m のまま上は処理しています。)

※　上記の解法は線形計画法などと呼ばれることもありますが，線形計画法自体，逆像法の考え方の一種です。

いずれにせよ，不等式から最大最小を出す際には，必ず等号成立条件は言及しましょう。

テストが 100 点以下だからといって，最高点が 100 点とは限りません。

($=100$ (点) の人がいて，初めて最高点が 100 点です。)