

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分、 x 軸、 y 軸、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また、 C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

< '22 九州大 >

【戦略】

- (1) 結局は三角関数に関する不等式の運用力です。

和積公式を用いる定番の処理となります。

パラメータを介した $\frac{dy}{dx}$ の計算は $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ と見ます。

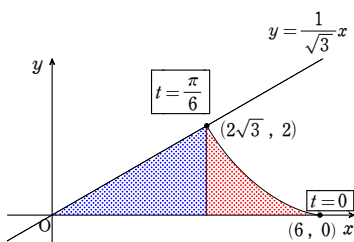
- (2) (1) の結果 (の一部) から、 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ の符号が得られ、増減表が得られますから、題意の図形がどこかが把握できます。

実質積分の力を借りる部分は

$$\int_{2\sqrt{3}}^6 y \, dx \text{ の部分です。}$$

y が x の式で表せず、かわりに y が t の式で表せることから

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^0 y \frac{dx}{dt} dt \text{ と見ます。}$$



これは、パラメータ曲線絡みの面積の定番処理です。

- (3) x 座標、 y 座標を、より t の関数として強調し、記述しやすくするため

$$x(t) = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y(t) = 5 \sin t - \sin 5t$$

と、おきなおします。

曲線上の点 $(x(t), y(t))$ に対して、 x 軸について対称移動した点は $(x(t), -y(t))$ です。

これが曲線 C 上にあることが言えればよいので、 $\begin{cases} x(t) = x(\star) \\ -y(t) = y(\star) \end{cases}$

という \star を見出せれば勝ちです。

また、 $(x(t), y(t))$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転させた点を (X, Y) としたときを考えるにあたり、一番自然な道具は複素数平面でしょう。

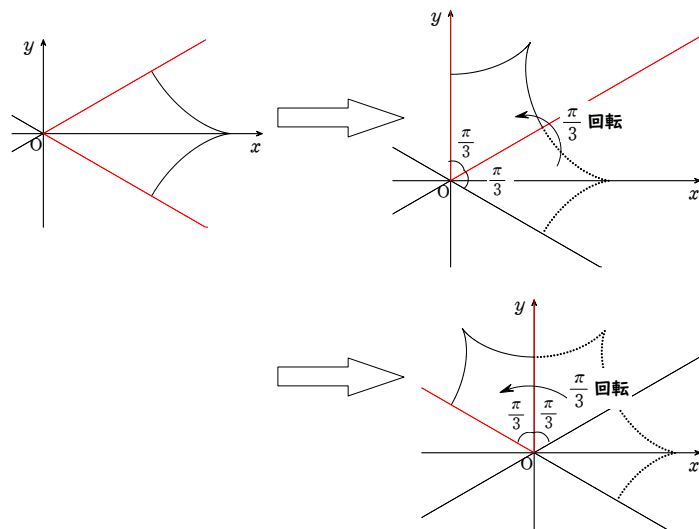
$$X + Yi = \{ x(t) + y(t)i \} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ を計算していき}$$

$\begin{cases} X = x(\star) \\ Y = y(\star) \end{cases}$ となる \star を見出せれば勝ちです。

- (4) (2) で考えた部分に対して

x 軸対称かつ C (の一部) を $\frac{\pi}{3}$ 回転させても C (の一部) になる

という (3) の結果を考えると



このように、 $\frac{\pi}{3}$ 回転ずつさせていけばよいことになります。

【解答】

$$(1) \frac{dx}{dt} = -5 \sin t - 5 \sin 5t$$

$$= -5(\sin 5t + \sin t)$$

$$= -10 \sin 3t \cos 2t \quad (\because \text{和積公式})$$

$$0 < t < \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } 0 < 3t < \frac{\pi}{2}, 0 < 2t < \frac{\pi}{3}$$

このとき, $\sin 3t > 0, \cos 2t > 0$ より, $\frac{dx}{dt} < 0$

$$\text{また, } \frac{dy}{dt} = 5 \cos t - 5 \cos 5t$$

$$= 5(\cos t - \cos 5t)$$

$$= 10 \sin 3t \sin 2t \quad (\because \text{和積公式})$$

$$\text{よって, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\sin 2t}{\cos 2t} (= -\tan 2t) \text{ で } 0 < 2t < \frac{\pi}{3} \text{ より}$$

$\frac{dy}{dx} < 0$ である。

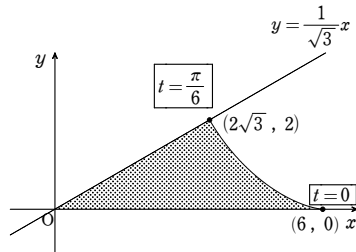
| | | | |
|----------------------------------|--------|-----|--------------------|
| t | 0 | ... | $\frac{\pi}{6}$ |
| $\frac{dx}{dt}$ | | - | |
| x | | ← | |
| $\frac{dy}{dt}$ | | + | |
| y | | ↑ | |
| $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ | | ↖ | |
| (x, y) | (6, 0) | | ($2\sqrt{3}, 2$) |

という増減表を得る。

(2) (図1)の打点部の面積を求めればよく, その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^6 y dx$$

$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 y \frac{dx}{dt} dt$$



(図1)

$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 (5 \sin t - \sin 5t)(-5 \sin t - 5 \sin 5t) dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 \sin^2 t - \sin^2 5t + 4 \sin 5t \sin t) dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ 5 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1 - \cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t) \right\} dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ 2 - \frac{5}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 10t - 2 \cos 6t + 2 \cos 4t \right\} dt$$

$$= 2\sqrt{3} + 5 \left[2t - \frac{5}{4} \sin 2t + \frac{1}{20} \sin 10t - \frac{1}{3} \sin 6t + \frac{1}{2} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 5 \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{20} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$= \frac{5}{3} \pi \dots \text{答}$$

(3) $x(t) = 5 \cos t + \cos 5t, y(t) = 5 \sin t - \sin 5t$ とおく。

$$x(-t) = 5 \cos(-t) + \cos(-5t)$$

$$= 5 \cos t + \cos 5t$$

$$= x(t)$$

$$y(-t) = 5 \sin(-t) - \sin(-5t)$$

$$= -5 \sin t + \sin 5t$$

$$= -y(t)$$

したがって, C 上の点 $(x(t), y(t))$ を x 軸について対称移動した点 $(x(t), -y(t))$ は, $(x(-t), y(-t))$ と一致し, 曲線 C は x 軸対称である。

また, C 上の点 $(x(t), y(t))$ を, 原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を (X, Y) とおく。

i を虚数単位として

$$X + Yi = \{x(t) + y(t)i\} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \{5 \cos t + \cos 5t + i(5 \sin t - \sin 5t)\} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \{5(\cos t + i \sin t) + (\cos(-5t) + i \sin(-5t))\} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 5 \left\{ \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right\} + \left\{ \cos\left(-5t + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-5t + \frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

$$= 5 \left\{ \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right\} + \left\{ \cos\left(-5t - \frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-5t - \frac{5\pi}{3}\right) \right\}$$

$$= 5 \left\{ \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right\} + \left\{ \cos\left(5t + \frac{5\pi}{3}\right) - i \sin\left(5t + \frac{5\pi}{3}\right) \right\}$$

$$= 5 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + i \left\{ 5 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

$$= x\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + y\left(t + \frac{\pi}{3}\right) i$$

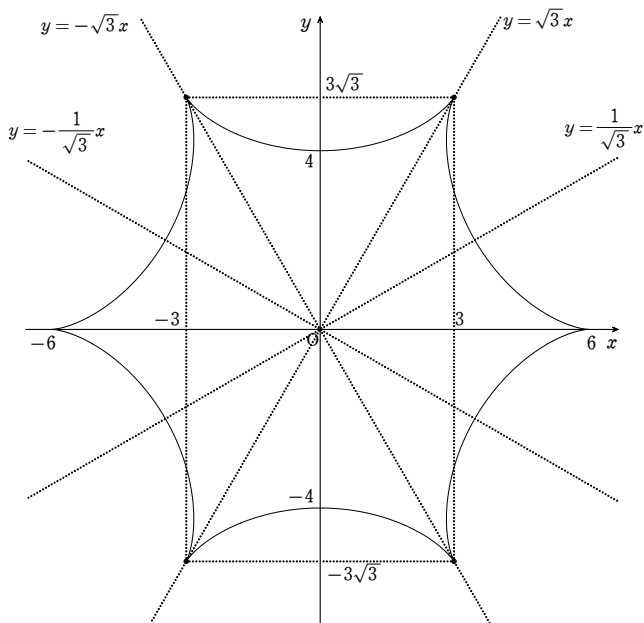
よって, $\begin{cases} X = x\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \\ Y = y\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$ であり, C 上の点 $(x(t), y(t))$ を, 原点

を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を (X, Y) も C 上にあることが示された。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\
 &= \frac{d}{dt} (-\tan 2t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\
 &= -\frac{2}{\cos^2 2t} \cdot \left(-\frac{1}{10 \sin 3t \cos 2t} \right) \\
 &= \frac{1}{5 \cos^3 2t \sin 3t}
 \end{aligned}$$

$0 < t < \frac{\pi}{6}$ のとき, $0 < 3t < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2t < \frac{\pi}{3}$ より, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

で, C は $0 < t < \frac{\pi}{6}$ の範囲で下に凸であることにも注意し (図1), 及び (3) の結果にも注意すると, 曲線 C の概形は以下の (図2) のようになる。



(図2)

【総括】

多少の計算はありますが, パラメータ表示された曲線の概形や面積を考える定番の内容です。

全体像を得るために, x 軸対称性や, $\frac{\pi}{3}$ ごとの回転対称性を用いるあたりについても誘導があるため難易度面では尖った発想を要求されているということはありません。

その対称性の証明である (3) が差がつくかなと思いますし, それなりに計算量はあります。

ただ, $X = x\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, $Y = y\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ という形にまとまるというのは予想の範疇であり, むやみに展開せずに処理する必要があり, 差がつく要素でしょう。

今回の曲線は半径 6 の円の中を半径 1 の円が転がるハイポサイクロイドという曲線です。

