2022 年度 九州大学 理系 第 4 問

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

　区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。
定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+\ell g(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \ell\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，ℓ は定数である。

　以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。<u>定積分の性質 $\boxed{\quad ア \quad}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行う</u>と，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\quad イ \quad}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \quad \cdots\cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=\ell=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\int_a^b g(x)\,dx>0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また，文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

< ’22 九州大 >