定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。
定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+\ell g(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \ell\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，ℓ は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \quad \cdots\cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=\ell=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx>0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

< '22 九州大 >

【戦略】

(1) **分配法則の証明です。左辺と右辺をそれぞれ定義に従って計算し，結果が一致することを言えばよいでしょう。**

(2) **「平均値の定理を用いて」という指示があるため，その指示に従っていきます。目標は $G(b)-G(a)>0$ です。**

(3) **増加関数であることから，区間 $\dfrac{i-1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{i}{n}$ で**

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(x) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

です。

ここから ② を目指すには「辺々 $\int$ をくっつけてもよい」という性質 (C) を用いることになります。

(4) **② に $i=1$，2，$\cdots$，n を代入して辺々加える（辺々 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$ をくっつける）という作業により，真ん中が**

$$\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} + \cdots\cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} = \int_0^1$$

と積分区間が繋がるという性質 (B) が決め手となり，③ が得られます。

【解答】

(1)　$H(x)=F(x)+G(x)$ とおく。

$$H'(x)=\lim_{h\to0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(x+h)+G(x+h)\}-\{F(x)+G(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right\}$$

$F(x)$，$G(x)$ は微分可能という条件から，

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}，\ \lim_{h\to0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

は各々の x の値に対して収束し，$\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)\\ \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=G'(x)\end{cases}$

となる。

ゆえに，$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$ が成立する。

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とおき，$h(x)=f(x)+g(x)$ と定める。

$H'(x)=F'(x)+G'(x)$ より，$H'(x)=h(x)$ である。

定積分の定義 ① より

$$\int_a^b h(x)\,dx=H(b)-H(a)$$
$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)-G(a)\}$$

一方，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$

$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)-G(a)\}$$

ゆえに，$\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

すなわち，$\displaystyle\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つ。

(2)　定積分の定義 ① より，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$ $\cdots(*)$

平均値の定理より，

$$\begin{cases}\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a}=g(c)\ \cdots(\sharp)\\ a<c<b\ \cdots(\sharp\sharp)\end{cases}$$

となる c が存在する。

区間 $a\leqq x\leqq b$ で $g(x)>0$ であるとき，$(\sharp\sharp)$ から，$g(c)>0$

一方，$a<b$ という条件から，$b-a>0$ である。

これより，$g(c)(b-a)>0$ で，$(\sharp)$ から，$G(b)-G(a)>0$ を得る。

したがって $(*)$ より，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx>0$ が成り立つ。

(3)　$0\leqq x\leqq1$ において，$f(x)$ が増加関数であるとき，

区間 $\dfrac{i-1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{i}{n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ において

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

性質 (C) により，

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i-1}{n}\right)dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i}{n}\right)dx$$

これより

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right)\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,dx\leqq f\left(\frac{i}{n}\right)\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}dx$$

すなわち

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,dx\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

という不等式 ② を得る。

∴　空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入るものとして最も ふさわしいものは (C) …答

(4)　不等式 ② に $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入し，辺々加えると

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,dx\leqq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

今，$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ と置いているので，(最左辺)$=S_n$

$$(\text{最右辺})=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right\}-\frac{f(0)}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}+\frac{f(1)-f(0)}{n}$$
$$=S_n+\frac{f(1)-f(0)}{n}$$

また，性質 (B) より

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}f(x)\,dx+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx$$

よって，$S_n\leqq\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\leqq S_n+\frac{f(1)-f(0)}{n}$

辺々 S_n を引くと，$0\leqq\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-S_n\leqq\frac{f(1)-f(0)}{n}$

と，不等式 ③ が得られる。

∴　空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入るものとして最も ふさわしいものは (B) …答

【総括】

どちらかというと公式の証明系の話題に近く，問題への運用力というよりは

定積分に関する定義の理解

定義から派生する性質の理解

などの定積分全般についての理解力を問うている問題です。

「微分するとは」「積分するとは」という根本的な部分を突っつくような内容で，

普段使っている $f'(x)$ や $\dfrac{dy}{dx}$ や $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ などの記号のことを

どれだけ分かっていますか

という投げかけです。

本当に理解している人からすると，問題文の長さのわりに訊かれていることは別に普通のことを訊いているなと感じるでしょうが，なぁなぁで済ませてきてしまった人にとってはボディーブローのように強烈に突き刺さってしまうでしょう。

理学部の数学科での講義の一端のような雰囲気を感じました。