2022 年度 九州大学 理系 第 3 問

自然数 m，n が

$$n^4=1+210m^2 \quad \cdots\cdots ①$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ① をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

＜ '22 九州大 ＞

【戦略】

(1) **(1) だけ見てみると，「アレ？ n が偶数のとき整数じゃなくね？」と疑問に思うと思います。**

このことから，問題の設定である

① を満たす n が奇数

という事実に目が向くと思います。

そこで，$n=2N-1$ などとおき，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ を計算していくと

$$\frac{n^2+1}{2}=\frac{(2N-1)^2+1}{2}=2N^2-2N+1$$

$$\frac{n^2-1}{2}=\frac{(2N-1)^2-1}{2}=2N^2-2N$$

と，これらが連続 2 整数となることが分かり，互いに素であると言えます。

(2) **$168=2^3\cdot 3\cdot 7$ であることから，n^2-1 が**

8 の倍数 かつ 3 の倍数 かつ 7 の倍数

であることを目指します。

① を見てみると，$(n^2+1)(n^2-1)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7m^2$ と n^2-1 が登場する形です。

素因数 3，7 を n^2-1 がもつことを言うためには，n^2+1 が 3 の倍数や 7 の倍数とならないことを目指せばよいでしょう。

$\mathrm{mod}\,3$ や $\mathrm{mod}\,7$ で 0 とならない (余りが 0 とならない) ことを目指せばよく，n を 3 で割った余り，7 で割った余りで分類して調べていけば，解決できます。

8 の倍数であることについては，(1) の途中経過から

$n^2-1=4N^2-4N\ (\ =4N(N-1)\ )$ ということが言えています。

4 の倍数であることは一目瞭然ですが，もう一押し $N(N-1)$ が連続 2 整数であることから，$N(N-1)$ が偶数であることが言え，8 の倍数であることも確定します。

(3) **① はやはり $210m^2=(n^2+1)(n^2-1)$ と因数分解した形で見たいところです。**

(2) から $n^2-1=168\alpha$ (α は整数) という形で表せることから

$$5m^2=4\alpha(n^2+1)$$

と言えます。

文字の種類を減らすため，n^2 を消去することを考えると

$n^2=168\alpha+1$ であり，

$$\begin{aligned}5m^2&=4\alpha(168\alpha+2)\\&=8\alpha(84\alpha+1)\end{aligned}$$

と言えます。

m^2 が素因数 2 を少なくとも 3 つはもつことから，m は 4 の倍数である必要が出てきます。

そこで，$m=4M$ とおくと，$80M^2=8\alpha(84\alpha+1)$ すなわち

$$10M^2=\alpha(84\alpha+1)$$

となります。

すると，今度は左辺が偶数なので，α が偶数となることになります。

$\alpha=2\beta$ (β は整数) などとおくと，$10M^2=2\beta(168\beta+1)$，すなわち

$$5M^2=\beta(168\beta+1)$$

です。

β，$168\beta+1$ のいずれかが 5 の倍数です。

本問は 1 組見つければいいので，考えやすく $\beta=5\gamma$ (γ は整数) のケースを考えてみます。

すると，$M^2=\gamma(840\gamma+1)$ という関係式を得ます。

ユークリッドの互除法

$G(840\gamma+1,\ \gamma)=G(\gamma,\ 1)=1$

$840\gamma+1$ と γ は互いに素で，共通素因数をもちませんから

共通素因数をもたないもの同士をかけて平方数となることから，お互いが平方数ということになります。

つまり，γ は平方数ということになります。

したがって，調べるとしたら $\gamma=1,\ 4,\ 9,\ \cdots$ ということになるでしょう。

$\gamma=1$ とすると，$M^2=841\ (\ =29^2\ )$，すなわち $M=29$ と見つかり解決です。

【解答】

(1) $210m^2+1$ は奇数であるため，等式 ① から，n^4 も奇数である。

これより n も奇数となる。

そこで，$n=2N-1$ $(N=1, 2, \cdots)$ とおく。

このとき，

$$\frac{n^2+1}{2}=\frac{(2N-1)^2+1}{2}=2N^2-2N+1$$
$$\frac{n^2-1}{2}=\frac{(2N-1)^2-1}{2}=2N^2-2N \cdots ②$$

となり，$\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は連続する 2 整数であるため，互いに素である。

以上から，題意は示された。

(2) ② より，$n^2-1=4N^2-4N=4N(N-1)$

N，$N-1$ は連続 2 整数なので，一方が偶数，他方が奇数。

ゆえに，$N(N-1)$ は偶数であり，n^2-1 は 8 の倍数。… ③

一方，① より，$n^4-1=210m^2$

$$(n^2+1)(n^2-1)=2\cdot3\cdot5\cdot7m^2 \cdots (☆)$$

ここで，k を整数として，

$$\begin{cases}(3k)^2+1\equiv1 \pmod 3\\(3k+1)^2+1\equiv2 \pmod 3\\(3k-1)^2+1\equiv2 \pmod 3\end{cases}$$

であるため，n^2+1 は 3 で割り切れず，素因数 3 をもたない。

(☆) より，n^2-1 が素因数 3 をもつしかない。… ④

一方，ℓ を整数として

$$\begin{cases}(7\ell)^2+1\equiv1 \pmod 7\\(7\ell\pm1)^2+1\equiv2 \pmod 7\\(7\ell\pm2)^2+1\equiv5 \pmod 7\\(7\ell\pm3)^2+1\equiv3 \pmod 7\end{cases}$$

であるため，n^2+1 は 7 で割り切れず，素因数 7 をもたない。

(☆) より，n^2-1 が素因数 7 をもつしかない。… ⑤

③，④，⑤，及び 8，3，7 は共通素因数をもたないことから
n^2-1 は $8\cdot3\cdot7$ $(=168)$ の倍数である。

ゆえに，題意は示された。

(3) ① より，$210m^2=(n^2+1)(n^2-1)$

(2) より，$n^2-1=168\alpha$ (α は整数) … ⑥ と表せるので

$$210m^2=168\alpha(n^2+1)$$

$$5m^2=4\alpha(n^2+1)$$

⑥ より，$n^2+1=168\alpha+2$ であるから，

$$\begin{aligned}5m^2&=4\alpha(168\alpha+2)\\&=8\alpha(84\alpha+1)\end{aligned}$$

右辺は 8 の倍数より，$5m^2$ が素因数 2 を少なくとも 3 個はもつため，m は 4 の倍数である必要がある。

$m=4M$ (M は整数) とおくと，

$$80M^2=8\alpha(84\alpha+1)$$

$$10M^2=\alpha(84\alpha+1)$$

$84\alpha+1$ は奇数

左辺は偶数より，$\alpha(84\alpha+1)$ が偶数なので，α が偶数。

$\alpha=2\beta$ (β は整数) とおくと

$$10M^2=2\beta(168\beta+1)$$

$$5M^2=\beta(168\beta+1)$$

$\beta(168\beta+1)$ が 5 の倍数となることに注意する。

$\beta=5\gamma$ (γ は整数) としてみると

$$M^2=\gamma(840\gamma+1)$$

$\gamma=1$ とすると，$M^2=841$ $(=29^2)$ であり，$M=29$ を得る。

このとき，$\gamma=1$ から $\beta=5$，すなわち $\alpha=10$ を得るため

⑥ より，$n^2-1=1680$，すなわち $n^2=1681$ $(=41^2)$ を得る。

ゆえに，$n=41$

また，このとき，$M=29$ より，$m=116$

以上から，求める自然数の組 (m, n) の 1 つとして

$$(m, n)=(116, 41) \cdots 答$$

がある。

【総括】

用いている手法たちは整数問題の基本である

$$\begin{cases} \text{積の形から約数・倍数関係を拾う} \\ \text{余りで分類する} \\ \text{範囲を絞る} \end{cases}$$

という考え方を用いていますが，どの場面でどの考え方を用いるのかについては

試行錯誤と経験によって磨かれる直感

が必要です。

(3) は「見つければよい」ということで，多少強引に調べました。

$\gamma=1$ で見つかったからよかったですが，見つからなかったら地獄です。

γ	$840\gamma+1$
1	841($=29^2$)
3364 ($=58^2$)	2825761 ($=1681^2$)
11309769 ($=3363^2$)	9500205961($=97469^2$)
38023440016 ($=194996^2$)	31939689613441 ($=5651521^2$)
⋮	⋮

※ もちろん，これは解き終わった後に，Excel で計算したものです。
これら γ の値に対して，m は整数として存在しますが，n が整数として存在するかは別問題であり，その検証についてもしなければなりません。