2022 年度 九州大学 理系 第 1 問

座標空間内の 5 点

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,1,0)$，$\mathrm{B}(2,1,2)$，$\mathrm{P}(4,0,-1)$，$\mathrm{Q}(4,0,5)$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P′ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となる点 R の座標を求めよ。

＜ ’22 九州大 ＞

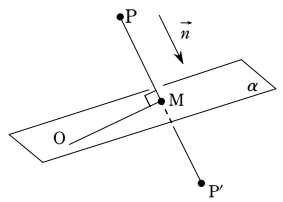
【戦略】

(1) $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\\ |\vec{n}|=1\end{cases}$ **という 3 条件を捌いていくので，求める $\vec{n}$ を $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と**

3 文字用いておいてしまって構わないでしょう。

この連立方程式を捌けば，$\vec{n}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ と得られます。

(2)



というシチュエーションを捌いていきます。

翻訳すべきは $\begin{cases}\text{PP′ と } \alpha \text{ が直交しているということ}\\ \text{線分 PP′ の中点 M が } \alpha \text{ 上であるということ}\end{cases}$

の 2 つです。

PP′ と α が直交していることについては α の法線ベクトル $\vec{n}$ が与えられていますから，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=k\vec{n}$ (k は実数) などとすれば翻訳完了です。

残るは線分 PP′ の中点 M が α 上にあるということです。

基本的に α 上の任意の点 X に対して $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\vec{n}$ は直交します。

そこで，M が α 上にあるということを $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{n}=0$ で翻訳すればよいでしょう。

(3) **折れ線の長さの最小値問題で定番の処理である**

折り返して一直線

という考え方で捌きます。

(**そのために出題側は (2) の対称点を準備させたのでしょう。**)

【解答】

(1) $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく。

$\vec{n}\cdot\vec{a}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{b}=0$ より，$x+y=0$ …①，$2x+y+2z=0$ …②

条件 $|\vec{n}|=1$ だから，$|\vec{n}|^2=1$ より，$x^2+y^2+z^2=1$ …③

① より，$y=-x$ …④

これを ② に代入すれば，$2x-x+2z=0$，すなわち $z=-\dfrac{1}{2}x$ …⑤

④，⑤ を ③ に代入すれば，$x^2+(-x)^2+\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^2=1$

これより，$x^2=\dfrac{4}{9}$ で，$\vec{n}$ の x 成分が正という条件から $x=\dfrac{2}{3}$

④，⑤ より，$y=-\dfrac{2}{3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$

以上から，$\vec{n}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ …答

(2) 線分 PP′ の中点を M とする。

分数が鬱陶しいので
$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\parallel 3\vec{n}$ として考えます。

$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp$(平面 α) より，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=k\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ (k は実数) と表せる。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2k\\-2k\\-k\end{pmatrix}$，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\begin{pmatrix}2k\\-2k\\-k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k+4\\-2k\\-k-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{2}=\begin{pmatrix}2\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k+2\\-k\\\frac{-k-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+4\\-k\\\frac{-k-2}{2}\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{n}=0$ より，$\dfrac{2}{3}(k+4)-\dfrac{2}{3}\cdot(-k)-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-k-2}{2}=0$

これより，$k=-2$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$

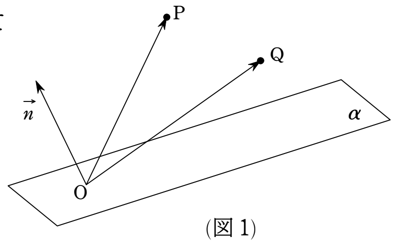
よって，$\mathrm{P'}(0,4,1)$ …答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=4\cdot\dfrac{2}{3}+0\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+(-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=3>0$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=4\cdot\dfrac{2}{3}+0\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+5\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=1>0$

ゆえに，

2 点 P，Q は平面 α について
同じ側にある。
((図 1) 参照)



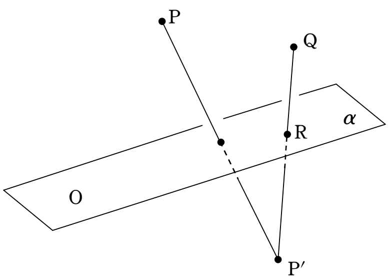
(図 1)

今，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P'R}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}|$$

(等号成立は P′，R，Q がこの順で同一直線上にあるとき)

と言える。((図 2) 参照)



(図 2)

求める点 R の座標は，線分 P′Q と平面 α との交点の座標である。

線分 P′Q 上の点 R は $0\leqq t\leqq 1$ なる実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表せる。

ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t\\-4t+4\\4t+1\end{pmatrix}$

一方，R は平面 α 上にあるため，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ である。

したがって，$4t\cdot\dfrac{2}{3}+(-4t+4)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+(4t+1)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$

これより，$t=\dfrac{3}{4}$ (これは $0\leqq t\leqq 1$ を満たす)

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ であり，求める R の座標は R$(3,\ 1,\ 4)$ … 答

【総括】

折れ線の長さの最小値問題という定番の話題であり，オチまでの誘導もしっかりとついています。

律儀に図を描くのに時間をかけるよりかは，ラフに状況を把握する図を描き，テンポよく立式していきたい問題です。

(2) は勉強している人ほど色々目移りし，解法によって多少計算量が変わってはきますが，極端に爆発するということもないので，目に付いた方針で十分捌ききれると思います。

ただ，なるべく時間を節約できるような手際の良さがほしいところです。

【平面の方程式について】

一般に，$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもち，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る平面の方程式は

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$$

と表せます。

今回の平面 α は $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもち，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を通るため

$$2x-2y-z=0\ \cdots(*)$$

と表現できます。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\begin{pmatrix}k+4\\-k\\\dfrac{-k-2}{2}\end{pmatrix}$ が出た時点で，M$\left(k+4,\ -k,\ -\dfrac{k+2}{2}\right)$ と M の座標が得られるので，この M が α 上であることについては，$(*)$ に代入すれば

$$2\,(k+4)-2\cdot(-k)-\left(-\frac{k+2}{2}\right)=0$$

として翻訳できます。

これにより，$k=-2$ を得て，【解答】の流れに合流します。

また，(3) についても，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}4t\\-4t+4\\4t+1\end{pmatrix}$ と出た段階で

$$\mathrm{R}\,(4t,\ -4t+4,\ 4t+1)$$

と R の座標が得られます。

この R が平面 α 上であることから，$(*)$ に代入することで

$$2\cdot 4t-2\,(-4t+4)-(4t+1)=0$$

として，$t=\dfrac{3}{4}$ を得ることができます。