数列 $\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ は，1 以上の整数 m，n に対して次の関係式を満たすとする。

$$(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}=0$$

(1)　$a_1=0$，$a_2=6$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_1=1$，$a_2=2$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

＜ '96 北海道大 ＞

【戦略】

(1)　**得体のしれない相手ですから実験してみたいところで，実験するとしたら簡単な数でしたいでしょう。**

その過程で遅かれ早かれ「全称命題」としての倒し方が目につくことになるでしょう。

任意の正の整数 m に対して

$$(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}=0$$

が成立するということは，特別 $m=1$ のときにも成立する必要があります。

つまり，$(n+2)a_n-(2n+1)a_1+(1-n)a_{n+1}=0$ が成り立つ必要があります。

$a_1=0$ を代入し，これを整理すると

$$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n$$

という漸化式を得ることになります。

これについては，両辺 $(n-1)n(n+1)(n+2)$ で割ることで

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{(n-1)n(n+1)}$$

という定数列の構造となります。

これにより，$a_n=(n-1)n(n+1)$ を得ます。
ただし，$n \geqq 2$ のときでないとこの話はできないことに注意しましょう。

また，あくまでこれは $m=1$ のときに成り立つ「必要がある」として導出した「必要条件」であり，その他の任意の m に対しても成立するかどうかは確認してみないと分かりませんから，その確認作業も忘れないようにしましょう。

(2)　**基本的には (1) の全称命題としての倒し方を踏襲します。**

$m=1$ のときも成立する必要があるので

$$(n+2)a_n-(2n+1)a_1+(1-n)a_{n+1}=0$$

今度は $a_1=1$ なので，

$$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n-(2n+1)$$

となります。

ただ (1) と大枠は変わらず，両辺 $(n-1)n(n+1)(n+2)$ で割ることで

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{(n-1)n(n+1)}-\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

として，階差数列の処理に持ち込みます。

階差の処理の過程で現れる $\sum$ 計算については

部分分数分解による「差分解からの和の中抜け」

が狙えます。

【解答】

$$(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}=0 \quad \cdots (*)$$

(1)　$(*)$ は $m=1$ のときも成立するため

$$(n+2)a_n-(2n+1)a_1+(1-n)a_{n+1}=0 \quad \cdots (**)$$

$a_1=0$ より，$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n$ を得る。

$n \geqq 2$ のとき，両辺 $(n-1)n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{(n-1)n(n+1)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{(n-1)n(n+1)}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n$

数列 $\{b_n\}$ $(n \geqq 2)$ は定数列であり

$$\begin{aligned} b_n&=b_2\\ &=\frac{a_2}{2\cdot1\cdot3}\\ &=\frac{6}{6}\ (\because \text{条件 } a_2=6)\\ &=1 \end{aligned}$$

よって，$n \geqq 2$ で $a_n=(n-1)n(n+1)$ を得る。

これに $n=1$ を代入すると，$a_1=0$ を得るため，$n=1, 2, \cdots$ に対して

$$a_n=(n-1)n(n+1)$$

逆にこのとき

$$\begin{aligned} &(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}\\ &=(n+2m)(n-1)n(n+1)-(m+2n)(m-1)m(m+1)\\ &\qquad+(m-n)(n+m-1)(n+m)(n+m+1)\\ &=(n+2m)(n^3-n)-(m+2n)(m^3-m)+(m^2-n^2)\{(n+m)^2-1\}\\ &=(n^4-n^2+2mn^3-2mn)-(m^4-m^2+2m^3n-2mn)\\ &\qquad+(m^2-n^2)(m^2+n^2+2mn-1)\\ &=(n^4-n^2+2mn^3-2mn)-(m^4-m^2+2m^3n-2mn)\\ &\qquad+\{(m^4-n^4)+(m^2-n^2)(2mn-1)\}\\ &=(n^4-n^2+2mn^3-2mn)-(m^4-m^2+2m^3n-2mn)\\ &\qquad+\{(m^4-n^4)+2m^3n-m^2-2mn^3+n^2\}\\ &=0 \end{aligned}$$

となり，任意の正の整数 m，n に対して $(*)$ が成立する。

以上から，$a_n=(n-1)n(n+1)$ …答

(2)　$m=1$ でも $(*)$ は成立するため $(**)$ が成立し，条件 $a_1=1$ より

$$(n+2)a_n-(2n+1)+(1-n)a_{n+1}=0$$

すなわち

$$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n-(2n+1)$$

$n\geqq 2$ のとき，両辺 $(n-1)n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{(n-1)n(n+1)}-\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{(n-1)n(n+1)}$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n-\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

これより，

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n&=-\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\\ &=\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

$c_n=\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$ $(n\geqq 2)$ とおくと

$$b_{n+1}-b_n=c_{n+1}-c_n \quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$n\geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} b_3-b_2&=c_3-c_2\\ b_4-b_3&=c_4-c_3\\ &\ \vdots\\ b_n-b_{n-1}&=c_n-c_{n-1} \end{aligned}$$

辺々加えると

$$b_n-b_2=c_n-c_2$$

これより，

$$\begin{aligned} b_n&=c_n+b_2-c_2\\ &=\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{a_2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3}\\ &=\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{2}{6}-\frac{1}{3}\quad(\because \text{条件 } a_2=2)\\ &=\frac{1}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

となり，

$$\frac{a_n}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

すなわち，$a_n=n$ $(n\geqq 2)$ を得る。

これは $n=1$ のときも成立するため，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$a_n=n$$

逆にこのとき

$$\begin{aligned} &(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}\\ &=(n+2m)n-(m+2n)m+(m-n)(n+m)\\ &=n^2+2mn-m^2-2mn+m^2-n^2\\ &=0 \end{aligned}$$

となり，任意の正の整数 m，n に対して $(*)$ が成立する。

以上から，$a_n=n$ …答

【戦略 2】漸化式の処理について（方針のみ）

$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n$ の処理については

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n-1}a_n$ という漸化式を順次使って番号を下げていくと

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{n+1}{n-2}a_{n-1}\\ &=\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\,a_{n-2}\\ &=\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\frac{n-1}{n-4}\cdot a_{n-3}\\ &=\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\frac{n-1}{n-4}\cdot\frac{n-2}{n-5}\,a_{n-4}\\ &=\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\frac{n-1}{n-4}\cdot\frac{n-2}{n-5}\cdot\frac{n-3}{n-6}\,a_{n-5}\\ &\ \ \vdots\\ &=\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\frac{n-1}{n-4}\cdot\frac{n-2}{n-5}\cdot\frac{n-3}{n-6}\cdot\frac{n-4}{n-7}\cdot\cdots\cdots\frac{4}{1}a_2\\ &=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\,a_2\\ &=(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

と得られます。

【総括】

全称命題であるということに最短距離で気づくことは中々難しいかもしれませんが，実験してみようという気持ちが，「簡単な m で」という気持ちに繋がり，$(**)$ へ導いてくれるでしょう。

なお，$(n-1)a_{n+1}=(n+2)a_n$ については

両辺 $(n-2)!$ をかけて　$\underbrace{\boxed{(n-1)!a_{n+1}}}_{b_{n+1}}=(n+2)\underbrace{\boxed{(n-2)!a_n}}_{b_n\text{ とおくと}}$

$b_{n+1}=(n+2)b_n$ と左辺の「変数倍」を解消した後，両辺 $(n+2)!$ で割ることで

$$\frac{b_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{b_n}{(n+1)!}$$

というように定数列の構造にして処理してもよいでしょう。

ただ結局，両辺に $(n-2)!$ をかけて，$(n+2)!$ で割るということは

$$\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\left(=\frac{1}{(n+2)(n+1)n(n-1)}\right)\text{ をかける}$$

つまり，

$$(n-1)n(n+1)(n+2)\text{ で割る}$$

ということに他ならず，これは【解答】と同じことをやっていることになります。