$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=5$, $\tan\gamma=8$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

とする。

(1) $\sin\alpha$ を求めよ。

(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

(3) $\beta-\alpha>\gamma-\beta$ となることを示せ。

(4) $\beta>\dfrac{5\pi}{12}$ となることを示せ。

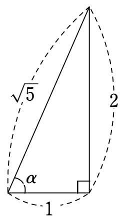
＜ '13 お茶の水女子大 ＞

【戦略 1】

(1) 相互関係 $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ により，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$ を得ます。

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{4}{5}$ となり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\alpha>0$ ですから，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を得ます。

ただ，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ と鋭角が相手であれば



という直角三角形を相手にした方が早いでしょう。

(2) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ という加法定理を順次利用していけばよいでしょう。

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\tan\gamma}{1-\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\tan\gamma}$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)}$$

に，$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ を代入すれば
$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ を得ます。

そうなると，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$（$n$ は整数）ということになりますが

範囲的に α, β, γ は明らかに $\dfrac{\pi}{4}$ よりは大きな鋭角であるため

$\dfrac{3}{4}\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$ です。

これにより，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$ を得ます。

(3) 裸の角度に対しては何もできません。

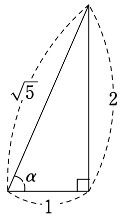
今回扱う角度 $\beta-\alpha$，$\gamma-\beta$ は鋭角の範囲の角度であるため
tan の服を着せて，$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$ を目指します。

(4) (3) より $2\beta>\alpha+\gamma$ なので，両辺 β を加えると，$3\beta>\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

となるため，ただちに $\beta>\dfrac{5\pi}{12}$ を得ます。

【解 1】

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，



という直角三角形を考える。

よって，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ …答

(2) $$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$$
$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\tan\gamma}{1-\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\tan\gamma}$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)}$$
$$=\frac{2+5+8-2\cdot5\cdot8}{1-(2\cdot5+5\cdot8+8\cdot2)}$$
$$=1$$ …答

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ は単調増加である。

ゆえに，$\tan\dfrac{\pi}{4}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$ であるため

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$$

したがって，$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}$

すなわち，$\dfrac{3}{4}\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$ であり，この範囲で

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ を満たすので，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$ …答

(3) $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{5-2}{1+5\cdot2}=\dfrac{3}{11}\left(=\dfrac{123}{11\cdot41}\right)$

$\tan(\gamma-\beta)=\dfrac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\dfrac{8-5}{1+8\cdot5}=\dfrac{3}{41}\left(=\dfrac{33}{11\cdot41}\right)$

ゆえに，$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$ …①

$0<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，
この範囲において ① を満たすことから $\beta-\alpha>\gamma-\beta$ が成り立つ。

(4) (3) より，$2\beta>\alpha+\gamma$ であるため，$2\beta+\beta>\alpha+\beta+\gamma$

(2) より，$3\beta>\dfrac{5}{4}\pi$，すなわち $\beta>\dfrac{5\pi}{12}$ を得る。

【戦略 2】(4) について

$\tan\beta > \tan\dfrac{5\pi}{12}$ を目指すのも普通の感覚です。

【解 2】(4) について

(4) $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

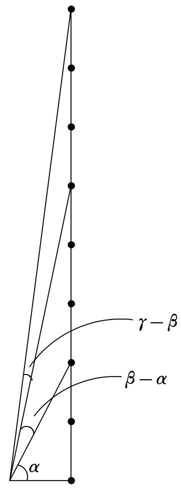
$$= 2+\sqrt{3}$$

$$< 5\ (=\tan\beta)$$

β, $\dfrac{5\pi}{12}$ は鋭角であるため，$\beta > \dfrac{5\pi}{12}$ が成り立つ。

【総括】

直角三角形の絵を描いてみると



というようになりますが，図形的には色々そりゃそうだなと思うところがあります。

答案には現れていませんが，このイメージが発想の素になっている所は部分部分であります。

例えば，(2) の $\alpha+\beta+\gamma$ の範囲や (4) の $\beta > \dfrac{5\pi}{12}$ を考えるにあたって $\tan\beta > \tan\dfrac{5\pi}{12}$ を目指す方針などはこの図が元になりました。

答案として使うかどうかは別問題ですが，情報を視覚化することや視覚化できないかを考えることは習慣化したいものです。