次の性質をもつ関数 $f(x)$ の例を，それぞれ 1 つずつ解答例にならって記入せよ。ただし，定数関数は除く。

$$\text{(例)}\quad f(-x)=\frac{1}{f(x)} \qquad \text{(答)}\quad 3^x$$

(1) $f(-x)=-f(x)$
(2) $f(-x)=f(x)$
(3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$
(4) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$
(5) $f(x+1)=2f(x)$
(6) $f(x+1)=f(x)$
(7) $f(2x)=1+f(x)$
(8) $f(2x)=f(x)$

＜ ’60 神戸大 ＞

【戦略】

(1) **奇関数なので，x，x^3，x^5，$\sin x$ などお好きなものをどうぞ。**

(2) **偶関数なので，x^2，x^4，x^6，$\cos x$ などお好きなものをどうぞ。**

(3) $f(x^{-1})=-f(x)$ **と見ると見やすいでしょうか。**

指数の -1 乗が -1 倍となる部分から，$\log x$ などが想起されます。

(4) **分かりやすいのは (3) の $\log x$ を 2 乗してしまう $\{\log x\}^2$ でしょうか。**

(5) $f(x+1)=2^1 f(x)$ **と見ると，2^x が想起されます。**

(6) **周期が 1 の周期関数ですから，$\sin 2\pi x$ や，$\cos 2\pi x$ などが考えられます。**

(7) **まず $f(2)=1$ を満たす f の中で考えます。**

つまり，$f(2x)=f(2)+f(x)$ と，無理やり f だけの関係式で見ると思いつきやすいでしょう。

これにより，$\log$ が想起され，$f(2)=1$ となると，$f(x)=\log_2 x$ が考えられます。

(8) **(7) の関係式を利用できないか考えると，(7) の $+1$ が邪魔です。**

すると，(6) に $+1$ を無効化する周期関数がいます。

そこで，(6) の関数を $g(x)$，(7) の関数を $h(x)$ とおきます。

$$\begin{cases} g(x+1)=g(x) \\ h(2x)=h(x)+1 \end{cases}$$

と並べてみると分かりやすく，

$$\begin{aligned} g(h(2x)) &= g\,(h(x)+1) \\ &= g\,(h(x)) \end{aligned}$$

であるため，

$$f(x)=g(h(x))$$

という合成関数を考えると，$f(2x)=f(x)$ となります。

【解答】

(1) (答) x

(2) (答) x^2

(3) (答) $\log x$

(4) (答) $\{\log x\}^2$

(5) (答) 2^x

(6) (答) $\sin 2\pi x$

(7) (答) $\log_2 x$

(8) (答) $\sin\{2\pi(\log_2 x)\}$

【総括】

例を挙げるだけとはいえ，なめてかかると最後のオチが意外と手ごわいかもしれません。

なお，(4) は

$$x \text{ と } \frac{1}{x} \text{ に関して対称}$$

と見てやることで，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ などでもよいでしょう。

逆に，そこから (3) を $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ と見ることもできます。