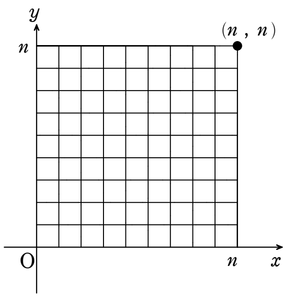
Oを原点とする座標平面上の格子状の道がある。

Oから出発して，点$(n\,,\,n)$に達するまでに格子上を動いてできる経路のうち，最短距離のものをPと名付ける。

また，x座標，y座標ともに整数である点を格子点という。

nを正の整数とするとき，次の問いに答えよ。



(1) 各Pに対して，Pが通過する格子点のx座標とy座標の全ての和は，経路Pに無関係であることを示せ。

(2) Pが通過する格子点のx座標の平方とy座標の平方のすべての和を最大にする経路Pと最大値を求めよ。

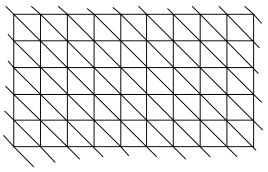
＜ ’81 高知医科大 ＞

【戦略】

(1) **x座標とy座標の和が☆という状況は，$(x\,,\,y)$が$x+y=☆$という直線上の点であることを意味します。**

このことから，$x+y=☆$という形の直線に目が行きます。

最短経路に関する問題において



というような斜めのライン上の点のどこかを1回通るという考え方を経験していると尚更これを活かす方向性がインスピレーションされやすいでしょう。

Pが通る$x+y=k$ $(k=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,2n)$上の点$(x_k\,,\,y_k)$について今回考える総和は$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(x_k+y_k)$であり，$x_k+y_k=k$ですから，結局$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}k$を考えることになります。

(2) **今度は$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}({x_k}^2+{y_k}^2)$について考えることになります。**

各々のkに対して，${x_k}^2+{y_k}^2$が最大となるときを考えます。

もちろん，$x_k+y_k=k$という関係を活かすということになると

${x_k}^2+{y_k}^2=(x_k+y_k)^2-2x_ky_k=k^2-2x_ky_k$と見ることになり$x_ky_k$が最小となればよいことになります。

さらに，x_ky_kは

$$
\begin{aligned}
x_ky_k&=\frac{1}{4}\left\{(x_k+y_k)^2-(x_k-y_k)^2\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{k^2-(x_k-y_k)^2\right\}
\end{aligned}
$$

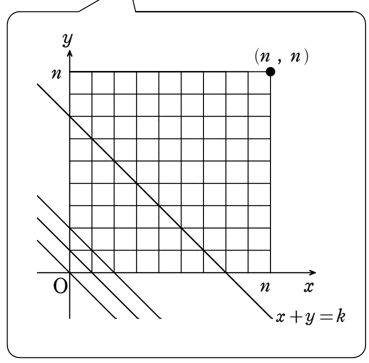
と表せるため，結局$x_k\,,\,y_k$の差が最大となるときを考えればよいことになります。

これより正方形の周上を通っていく経路を考えればよいことが分かります。

【解答】

$k=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,2n$に対して

各々のPは必ず$x+y=k$上の点を1回ずつ通る



(1) Pの通る$x+y=k$上の各格子点を$(x_k\,,\,y_k)$とすると

$$x_k+y_k=k$$

題意の和は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}(x_k+y_k)&=\sum_{k=0}^{2n}k\\
&=\frac{2n\,(2n+1)}{2}\\
&=n\,(2n+1)
\end{aligned}
$$

となり，Pによらず与えられたnにのみ依存する一定値となる。

(2)
$$
\begin{aligned}
{x_k}^2+{y_k}^2&=(x_k+y_k)^2-2x_ky_k\\
&=k^2-2x_ky_k
\end{aligned}
$$

ゆえに，${x_k}^2+{y_k}^2$が最大 $\Leftrightarrow$ x_ky_kが最小 $\cdots$①

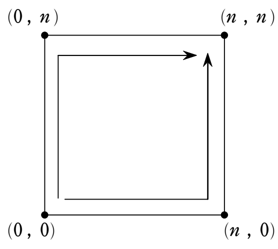
また，
$$
\begin{aligned}
x_ky_k&=\frac{1}{4}\left\{(x_k+y_k)^2-(x_k-y_k)^2\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{k^2-(x_k-y_k)^2\right\}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
x_ky_k\text{が最小}&\Leftrightarrow (x_k-y_k)^2\text{が最大}\\
&\Leftrightarrow x_k\text{と}y_k\text{の差が最大}\ \cdots②
\end{aligned}
$$

題意の和を最大にするためには各々の$k$$(=0\,,1\,,2\,,\cdots\,,\,2n)$に対して$x$座標と$y$座標の差が最大となるような格子点を通っていけばよい。

つまり



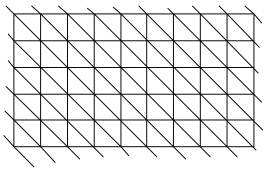
のような$\begin{cases}(0,\ 0)\longrightarrow(n\ ,\ 0)\longrightarrow(n\ ,\ n)\\(0,\ 0)\longrightarrow(0\ ,\ n)\longrightarrow(n\ ,\ n)\end{cases}$という経路のときに

題意の和は最大となる。…答

このとき題意の和は

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n^2+1^2)+(n^2+2^2)+\cdots+(n^2+n^2)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times 2+n^2\cdot n$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+n^3$$
$$=\frac{n}{3}(5n^2+3n+1)\ \cdots 答$$

【総括】



という斜めのラインに注目する考え方に対する馴染み深さがモノを言ったことでしょう。

⑵ も論じきるとなると案外難問です。

$x_k y_k$ が最小となればよいという部分までは見抜けるかもしれませんが，

「$x_k y_k$ という積が最小」

ということをどのように捉えなおすかという部分で難しさを感じるでしょう。

直感的には

$(0,\ k)$，$(1,\ k-1)$，$(2,\ k-2)$，……，$(k-1,\ 1)$，$(k,\ 0)$

という $x+y=k$ 上の点に対して，座標同士の積は

$(0,\ k)$ または $(k,\ 0)$ のとき 0

それ以外のとき正の値

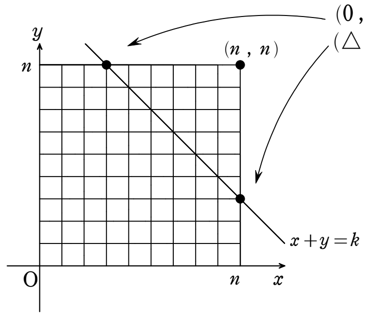
となるため，

$(0,\ 0)\to(1,\ 0)\to(2,\ 0)\to\cdots\cdots\to(n,\ 0)$

$(0,\ 0)\to(0,\ 1)\to(0,\ 2)\to\cdots\cdots\to(0,\ n)$

というように，正方形の周上に沿って動いていくというのはある意味自明かもしれません。

ただ，$k=n+1$，$n+2$ ……，$2n$ のときは



$(0,\ \square)$
$(\triangle,\ 0)$ という形が入ってきません。

このあたりの論証にケチをつけられないように，解答は

$$x_k y_k=\frac{1}{4}\{(x_k+y_k)^2-(x_k-y_k)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\{k^2-(x_k-y_k)^2\}$$

として，$x_k y_k$ が最小となることを，「x_k と y_k の差が最大となる」と言い換えたわけです。

x_k と y_k は $y=x$ というラインに寄れば寄るほど小さくなりますから，逆に $y=x$ というラインから離れた格子点である正方形の周上を通ればよいわけです。