仮想難関大【座標〜放物線の極線〜】

　$y>-x^2$ の領域にある点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から，放物線 $y=-x^2$ に相異なる 2 本の接線を引き，放物線 $y=-x^2$ との接点を A，B とする。
　次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB の式を p，q を用いて表せ。

(2)　点 P が曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の $x>0$ の部分を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略 1】

(1)　**$\mathrm{A}(a,\ -a^2)$ とすると，$y'=2x$ より，接線の式は**

$$y=-2a(x-a)-a^2 \Leftrightarrow y=-2ax+a^2$$

と得られます。

これが $(p,\ q)$ を通ることから，

$$q=-2ap+a^2\ (\Leftrightarrow 2pa-a^2=-q\ )$$

が得られます。

同様に，$\mathrm{B}(b,\ -b^2)$ とすれば，a の立場を b に置き換えればよく

$$2pb-b^2=-q$$

が得られます。

ここから先のモノの見方は経験によるところが大きいのですが

$\begin{cases}2pa-a^2=-q\\2pb-b^2=-q\end{cases}$ **が成り立っているということは**

直線 $2px+y=-q$ 上に $(a,\ -a^2)$，$(b,\ -b^2)$ がある

ということに他なりません。

> ※ **直線 $2px+y=-q$ 上に $(a,\ -a^2)$，$(b,\ -b^2)$ があるとき**
> $\begin{cases}2pa-a^2=-q\\2pb-b^2=-q\end{cases}$ **が成り立つという方向だと多くの人は**
> **納得してくれますが，今それを逆に見ているわけです。**

そして，$(a,\ -a^2)$，$(b,\ -b^2)$ を通る直線は一通りに決まるため
求める直線 AB が $2px+y=-q$ と決定します。

(2)　**直線 AB の式が手元にある状態であれば，**

AB を底辺と見て点と直線の距離で高さを出す

という作戦が自然です。

まずは底辺 AB の長さを出す部分からですが，最初は a，b の式として得られます。

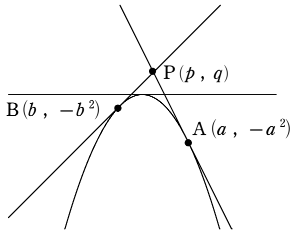
最終的なオチは $q=\dfrac{1}{p}$ という従属 2 変数の最小値問題に帰着することが想定されます。

そこで，a，b を p，q と結びつけることを考えていきます。

AB の傾きに注目すれば，$-(a+b)=-2p$ という関係を得て，(1) の導出過程で現れる $q=-2ap+a^2$ と絡めると，$q=-ab$ を得ます。

これにより，底辺 AB，高さがともに p，q の式で表されることになります。

【解 1】



(1)　$\mathrm{A}(a,\ -a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ -b^2)$ とする。

$y=-x^2$ において，

$$y'=-2x$$

であるから，A における接線の式は，

$$y=-2a(x-a)-a^2$$

すなわち $y=-2ax+a^2$

これが，$\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るので，$q=-2ap+a^2$，すなわち

$$2pa-a^2=-q \cdots ①$$

を得る。

同様に，$2pb-b^2=-q\ \cdots ②$ も得る。

①，② は，$2px+y=-q$ という直線上に 2 点
$\mathrm{A}(a,\ -a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ -b^2)$ があることを意味する。

この 2 点 A，B を通る直線は一意的に決まる。

ゆえに，求める直線 AB は $2px+y=-q$，すなわち

$$2px+y+q=0 \cdots \text{答}$$

(2)　直線 AB の傾きは $\dfrac{-b^2-(-a^2)}{b-a}=-(a+b)$

(1) の結果から，$-(a+b)=-2p$

これより，$a+b=2p$ となり，このとき，① より

$$q=-2ap+a^2=-2a\cdot\frac{a+b}{2}+a^2=-ab$$

まとめると，$\begin{cases}a+b=2p\\ab=-q\end{cases}\cdots(*)$ が成り立つ。

さて，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(b-a)^2+\{-b^2-(-a^2)\}^2\\&=(b-a)^2+\{(a+b)(a-b)\}^2\\&=(a-b)^2\{1+(a+b)^2\}\\&=\{(a+b)^2-4ab\}\{1+(a+b)^2\}\\&=(4p^2+4q)(4p^2+1)\quad(\because (*))\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AB}=2\sqrt{p^2+q}\ \sqrt{4p^2+1}$

一方，$\mathrm{P}(p,\ q)$ と直線 AB との距離を d とすると

$$\begin{aligned}d&=\frac{|2p^2+q+q|}{\sqrt{4p^2+1}}\\&=\frac{2|p^2+q|}{\sqrt{4p^2+1}}\end{aligned}$$

$(p,\ q)$ は領域 $y>-x^2$ にある点であり，$q>-p^2$，すなわち $p^2+q>0$ を満たすため

$$d=\frac{2(p^2+q)}{\sqrt{4p^2+1}}$$

これより，$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{p^2+q}\ \sqrt{4p^2+1}\cdot\frac{2(p^2+q)}{\sqrt{4p^2+1}}$$

$$=2(p^2+q)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，$(p,\ q)$ が曲線 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$ 上を動くとき，$q=\frac{1}{p}\ (p>0)$ を満たすので，

$$\triangle PAB=2\left(p^2+\frac{1}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

以下，$f(p)=p^2+\frac{1}{p}\ (p>0)$ と定め，$f(p)$ の最小値を求める。

$$f'(p)=2p-\frac{1}{p^2}$$
$$=\frac{2p^3-1}{p^2}$$

これより

p	(0)	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(p)$		$-$	0	$+$
$f(p)$		↘	$3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	↗

という増減表を得る。

$\triangle PAB$ の面積の最小値は

$$2\left\{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{3}{2}}=2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot\left\{2^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=3^{\frac{3}{2}}$$
$$=3\sqrt{3}\ \cdots 答$$

【戦略 2】(2) の部分的処理

$f(p)=p^2+\frac{1}{p}\ (p>0)$ の最小値の導出は相加平均・相乗平均の関係で仕留めることもできますが，テクニカルな式変形を要し，初見では中々できません。

【解 2】(2) の部分的処理

【解 1】の $f(p)=p^2+\frac{1}{p}\ (p>0)$ と定め，$f(p)$ の最小値を求めるという部分以降

－－

$$f(p)=p^2+\frac{1}{p}$$
$$=p^2+\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{p^2\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{2p}}\quad(\because\ 相加平均\cdot相乗平均の関係)$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

等号成立は $p^2=\frac{1}{2p}$，$p>0$ の範囲では $p=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ のとき

よって，$\triangle PAB$ の面積の最小値は

$$2\left\{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{3}{2}}=2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot\left\{(2^{-2})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-1}$$

$$=3\sqrt{3}\ \cdots 答$$

【総括】

円の極線という話題は有名ですが，本問はそれを放物線でやろうという試みの問題です。

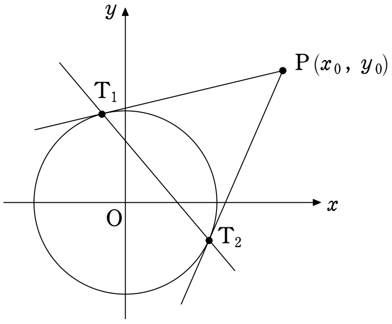
計算自体は決して軽くはありませんが，構図自体は定番の構図ですから，様々な方法で検算出来ると思います。

最後の最小値は素直に微分法で仕留めるのが手なりでしょうが，【解 2】のように無理矢理「相加平均・相乗平均の関係」に持ち込むことも可能です。

【参考】

円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から円に引いた 2 本の接線の接点を T_1，T_2 とします。

このとき，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ をこの円の極線と言い，P を極と言います。



円の方程式が $x^2+y^2=r^2$ のとき $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を極とする極線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

で与えられます。

接線を作る要領で作れます。
そのせいで逆に接線を作ろうとして意図せず極線を作っている初学者が多く，指導者泣かせな項目です。

（証明）

$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ とすると，T_1 における円の接線は

$$s_1x+t_1y=r^2$$

これが $(x_0,\ y_0)$ を通るので $s_1x_0+t_1y_0=r^2$

こっちの流れは普段からよく使う脳みその使い方で分かりやすいですが

同様に，$s_2x_0+t_2y_0=r^2$

こっちの流れはクセがありますね。

この結果は，$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ が直線 $x_0x+y_0y=r^2$ 上にあるということを意味し，それはすなわち，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ の方程式が

$x_0x+y_0y=r^2$ であることを意味する。