xy 平面上の放物線 $C_1: y=x^2$ 上に，A (a, a^2) $(a>0)$ をとり，A における接線と y 軸との交点を B とする。

線分 AB を直径とする円を C_2 として，C_1，C_2 の交点のうち，A と異なる方を P とするとき，直線 AP の傾きが $\frac{1}{3}$ となるような a の値を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略 1】

手なりに

A における接線の式

→ y 切片 (B の座標) Get

→ 線分 AB の中点 (C_2 の中心)，及び C_2 の半径，方程式を Get

→ C_1，C_2 の式を連立

という流れで考えていきます。

最後，C_1，C_2 の式を連立して y を消去すると

$$x^4+x^2-ax-a^4=0$$

となりますが，ここから A の x 座標を与える $x=a$ を解にもつことから

$$(x-a)\{x^3+ax^2+(a^2+1)x+a^3\}=0$$

と因数分解できることを看破しましょう。

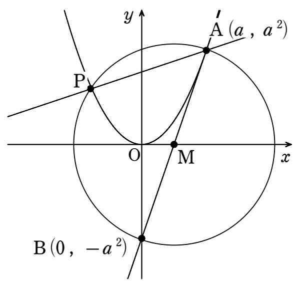
したがって，P の x 座標は $x^3+ax^2+(a^2+1)x+a^3=0$ から得られることになりますが，これを実際に解くことが難しいため，解を $x=p$ とおき，傾きに関する条件

$$\frac{a^2-p^2}{a-p}=a+p\left(=\frac{1}{3}\right)$$

から，$p=\frac{1}{3}-a$ として $p^3+ap^2+(a^2+1)p+a^3=0$ に代入することで a に関する方程式に持ち込みます。

文字を消去する際，$p\fallingdotseq a$ であることから，$\frac{1}{3}-a\fallingdotseq a$，すなわち $a\fallingdotseq\frac{1}{6}$ であることには注意しましょう。

【解 1】



$y=x^2$ について，$y'=2x$ であるから，A (a, a^2) における接線の式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$

すなわち $y=2ax-a^2$

よって，B$(0, -a^2)$

線分 AB の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\mathrm{MA}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^4=\frac{4a^4+a^2}{4}$$

ゆえに，円 C_2 の方程式は

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{4a^4+a^2}{4}$$

これと，$C_1: y=x^2$ を連立して y を消去すると

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+x^4=\frac{4a^4+a^2}{4}$$

これを整理すると，$x^4+x^2-ax-a^4=0$ を得る。

これは，$(x-a)\{x^3+ax^2+(a^2+1)x+a^3\}=0$ と変形できる。

$x=a$ は A の x 座標を与えるので，P の x 座標を p とすると，

$$p^3+ap^2+(a^2+1)p+a^3=0 \cdots (*)$$

を満たす。

$(*)$ において，$p=a$ とすると，$4a^3+a=0$ で $a>0$ であるから，不合理となり，$p\fallingdotseq a$

直線 AP の傾きは $\frac{a^2-p^2}{a-p}=a+p$ であるので，条件から，$a+p=\frac{1}{3}$

ゆえに，$p=\frac{1}{3}-a$ であるから，$(*)$ に代入して，

$$\left(\frac{1}{3}-a\right)^3+a\left(\frac{1}{3}-a\right)^2+(a^2+1)\left(\frac{1}{3}-a\right)+a^3=0$$

これを整理すると，$18a^2-33a+10=0$ となり，$a>0$ より，

$$a=\frac{11\pm\sqrt{41}}{12}$$

を得る。

また，$p\fallingdotseq a$ なので，$\frac{1}{3}-a\fallingdotseq a$，すなわち $a\fallingdotseq\frac{1}{6}$ であることも満たす。

以上から，求める a の値は $a=\frac{11\pm\sqrt{41}}{12}$ …答

【戦略 2】

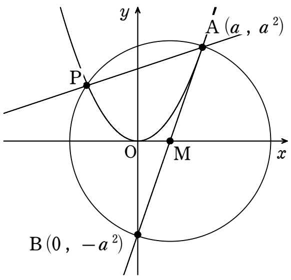
$A\,(a\,,\,a^{2})$

→ 傾きの条件から $\dfrac{a^{2}-p^{2}}{a-p}=a+p\left(=\dfrac{1}{3}\right)$ **で，** $P\left(\dfrac{1}{3}-a\,,\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^{2}\right)$

→ PA，PB が直交するので $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

という流れも考えられますが，ツライ 3 次方程式が登場します。

【解 2】



$P\,(p,\,p^{2})$ とすると
P は A と異なるので

$$p\neq a$$

直線 AP の傾きは
$\dfrac{a^{2}-p^{2}}{a-p}=a+p$ であるので，
条件から，$a+p=\dfrac{1}{3}$

$p\neq a$ より，$a+a\neq\dfrac{1}{3}$， すなわち $a\neq\dfrac{1}{6}$ …①

よって，$P\left(\dfrac{1}{3}-a\,,\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^{2}\right)$ とおける。

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}a\\a^{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}-a\\\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-\dfrac{1}{3}\\\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\-a^{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}-a\\\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-\dfrac{1}{3}\\-2a^{2}+\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{9}\end{pmatrix}$$

条件から，円 C_2 は線分 AB を直径とする円で，P は C_2 上にあるので，
直線 PA，PB は直交しており，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

ゆえに，$\left(2a-\dfrac{1}{3}\right)\left(a-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{9}\right)\left(-2a^{2}+\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{9}\right)=0$

展開して整理すると，$108a^{3}-216a^{2}+93a-10=0$

この 3 次方程式はツライでしょう。

これは $(6a-1)(18a^{2}-33a+10)=0$ と変形でき，① より，

$$18a^{2}-33a+10=0$$

である。

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ を翻訳しているのですから，
P と A が一致する $a=\dfrac{1}{6}$ が紛れ込むことに
気がつかないと，この因数分解はほぼ無理です。

ゆえに，求める $a\,(a>0)$ の値は $a=\dfrac{11\pm\sqrt{41}}{12}$ …答

【総括】

与えられたシチュエーションを立式していけば，ある程度のところまでは手が進むでしょう。

点 P というのは，$A\,(a\,,\,a^{2})$ に依存する点ですから，

P も a を用いて表せるはず

という考えを指針にもって進めましょう。

逆に，傾きが $\dfrac{1}{3}$ というところからスタートする【解 2】だと，点 P が円の上の点であることを利用することを考えることになります。

素直なのは AB が直径であることを利用して，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ とする方針ですが，$a=\dfrac{1}{6}$ だと，$\overrightarrow{PA}=\vec{0}$ となってしまうという落とし穴がありますから，そこに注意しなければなりません。