$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。辺 BC 上に，$BD=1$ となる点 D をとる。
このとき次の問いに答えよ。

(1) △ADC の外接円の半径を求めよ。
(2) △ABC の外接円の中心を O，△ADC の外接円の中心を O′ とするとき，$\sin\angle OAO'$ の値を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) **外接円半径 R が欲しいのであれば，正弦定理で仕留めるというオチを見据えます。**

正弦定理を用いる際の対角対辺 (お向かいさん) としては

$$\frac{AD}{\sin C}=2R$$

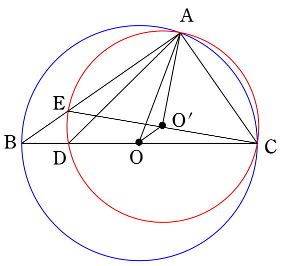
として見るのがよいでしょう。

$\sin C$ **については直角三角形による定義から** $\sin C=\dfrac{4}{5}$ **と手元にあります。**

AD **については，△ABD で余弦定理を用いればよいでしょう。**

これも $\cos B$ **が直角三角形による定義から** $\cos B=\dfrac{4}{5}$ **と手元にあるためです。**

(2) **状況を図示してみると右図のようになります。**



ターゲットの $\angle OAO'$ **を含む三角形** △AOO′ **に注目します。**

$\sin\angle OAO'$ **を扱うにあたって**
正弦定理経由 or 面積経由
で攻め落としたいところですが，正弦定理経由だと △AOO′ **の外接円半径など扱いずらいでしょう。**

そこで，面積経由で $\sin\angle OAO'$ **を導出する作戦でいきます。**

方べきの定理から BE **が分かります。**

中点連結定理を用いると， $OO'=\dfrac{1}{2}BE$ **ですから，** OO′ **が Get できます。**

中心角と円周角の関係，及び同位角の関係から， $\angle AOO'=\angle B$ **であることが言えるため，** $\sin\angle AOO'$ **も手元にある状態です。**

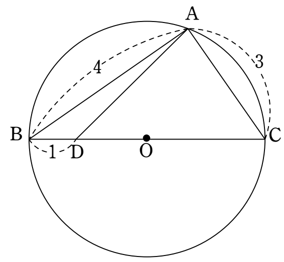
したがって，面積に注目すれば

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot R\cdot\sin\angle OAO'=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot OO'\cdot\sin\angle AOO'$$

という関係式が成り立ち，解決です。

【解答】

(1)



$\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\sin C=\dfrac{4}{5}$

△ABD で余弦定理より，

$$AD^2=4^2+1^2-2\cdot4\cdot1\cdot\cos B=16+1-8\cdot\frac{4}{5}=\frac{53}{5}$$

$\therefore\ AD=\dfrac{\sqrt{265}}{5}$

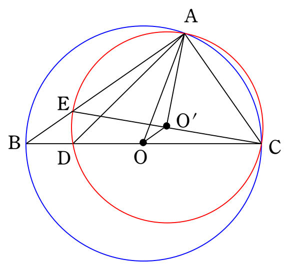
求める外接円の半径を R とすると，△ADCで正弦定理より，

$$\frac{AD}{\sin C}=2R$$

よって

$$R=\frac{\frac{\sqrt{265}}{5}}{2\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{265}}{8}\ \cdots 答$$

(2)



△ADCの外接円と辺 AB の交点を E とする。

線分 CE は △ADCの外接円の直径である。

方べきの定理より $BE\cdot BA=BD\cdot BC$

よって，$BE\cdot4=1\cdot5$ で，これより，$BE=\dfrac{5}{4}$

△CEB で中点連結定理より，$OO'=\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{5}{8}$

$\angle ABC=\beta$ とすると，$AB /\!/ OO'$ より，$\angle O'OC=\beta$

中心角の定理から，$\angle AOC=2\beta$ なので，$\angle AOO'=2\beta-\beta=\beta$

△AOO′ の面積に注目すれば，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot R\cdot\sin\angle OAO'=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot OO'\cdot\sin\beta$$

よって，

$$\sin\angle OAO'=\frac{OO'\cdot\sin\beta}{R}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{265}}{8}}=\frac{3}{\sqrt{265}}=\frac{3\sqrt{265}}{265}\ \cdots 答$$

【総括】

シンプルな構成の中に

三角比の定義
正弦定理
余弦定理
方べきの定理
中点連結定理
円周角の定理
面積公式

が盛り込まれているカロリーの高い問題です。

絶妙な位置関係なので，乱暴に図を描くと変な勘違いによって事故る可能性も多々あります。