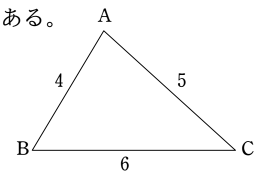
図のような3辺の長さをもつ三角形 ABC がある。

(1) $45° < \angle B < 60°$ を証明せよ。

(2) $\angle \mathrm{A} = 2\angle C$ を証明せよ。

(3) $40° < \angle C < 45°$ を証明せよ。



< '12 広島大 >

【戦略 1】

※ **$\angle\square$ という表記は不等号と混ぜると見にくいため，以下，三角形の内角を単に A，B，C と表すことにします。**

(1) **裸の角度に対して我々ができることはほとんどありません。**

$\cos B$ **や** $\sin C$ **などの服を着せて考えていきます。**

今回は3辺が分かっている状況ですから，余弦定理により $\cos B$ **が得られます。**

示すべき不等式を cos **の服を着せて読み替えると**

$$\cos 60° < \cos B < \cos 45°$$

です。

これは $0° < \theta < 180°$ **の範囲で，**$\cos\theta$ **が単調減少であることから従います。**

そこで，$\cos 45° - \cos B$，$\cos B - \cos 60°$ **を計算していくことになります。**

(2) **示すべき関係式を** $\cos A = \cos 2C$ **と読み替えます。**

これも $0° < \theta < 180°$ **における** $\cos\theta$ **の単調性によるものです。**

$\cos C$，$\cos A$ **に関しても余弦定理からそれぞれ得られます。**

あとは2倍角の公式の単純運用で $\cos A = \cos 2C$ **であることが確かめられます。**

(3) **(2)の結果，及び** $A+B+C=180°$ **から**

$2C+B+C=180°$，**すなわち，**$B=180°-3C$ **となります。**

この B **を評価している(1)の不等式から，**$45° < 180° - 3C < 60°$ **を処理することで，**$40° < C < 45°$ **が得られて解決です。**

【解 1】

以下，△ABC の頂点 A，B，C を見込む内角を単に A，B，C と表記する。

(1) 余弦定理より，$\cos B = \dfrac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 4} = \dfrac{9}{16}$

$$\begin{aligned}\cos 45° - \cos B &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{16}\\ &= \frac{8\sqrt{2}-9}{16}\\ &= \frac{\sqrt{128}-\sqrt{81}}{16}\\ &> 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos B - \cos 60° &= \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{16}\\ &> 0\end{aligned}$$

よって，$\cos 60° < \cos B < \cos 45°$

$0° < \theta < 180°$ の範囲で，$\cos\theta$ は単調減少であるため，

$$45° < B < 60°$$

が成立する。

(2) 余弦定理から，

$$\begin{cases}\cos C = \dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5} = \dfrac{3}{4} & \cdots ① \\ \cos A = \dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 4} = \dfrac{1}{8} & \cdots ②\end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\cos 2C &= 2\cos^2\theta - 1\\ &= 2\cdot\frac{9}{16} - 1 \ (\because ①)\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

② より，$\cos A = \cos 2C$

$0° < \theta < 180°$ の範囲では，θ の値と $\cos\theta$ の値が1対1対応することを考えると，

$$A = 2C$$

が成立する。

(3) $A+B+C=180°$ であり，(2)の結果から

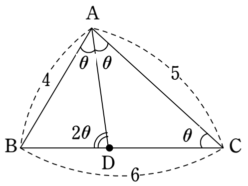
$$2C+B+C=180°$$

すなわち，$B=180°-3C$ を得る。

(1)より，$45° < 180° - 3C < 60°$

これを整理すると，$40° < C < 45°$ を得る。

【戦略 2】(2) について



というシチュエーションが完成していることを目指します。

つまり，$\triangle$ABD $\backsim$ $\triangle$CBA であることが言えれば解決です。

今，内角の二等分線の性質から， $\mathrm{BD}=6\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{3}$ **です。**

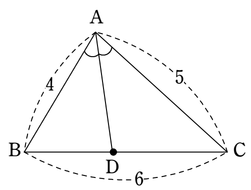
これより， $\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=4:\dfrac{8}{3}=3:2$ **であり，** $\mathrm{CB}:\mathrm{BA}=6:4=3:2$
であり， $\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=\mathrm{CB}:\mathrm{BA}$ **が言え，さらに** $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{CBA}$ **でもありますから，二辺とその間の比がそれぞれ等しいということになり，**

$$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{CBA}$$

が言えて解決です。

【解 2】(2) について

(2) 内角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。



内角の二等分線の性質から

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$

ゆえに，$\mathrm{BD}=6\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{3}$

よって，$\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=4:\dfrac{8}{3}=3:2$ …(Ⅰ)

一方，$\mathrm{CB}:\mathrm{BA}=6:4=3:2$ …(Ⅱ)

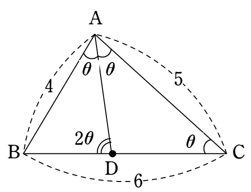
また，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{CBA}$ (共通角) …(Ⅲ)

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) より，$\triangle$ABD，$\triangle$CBA において二辺の比とその間の角がそれぞれ等しいため

$$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{CBA}$$

これより，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCA}\,(=\theta)$ とおくことができ，さらに線分 AD が $\angle A$ の二等分線であったことから $\angle\mathrm{DAC}=\theta$

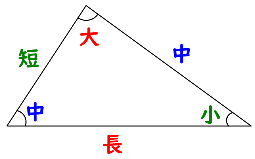
以上から



という図のようになり，$A=2C$ が成立する。

【戦略 3】

(3)



というように，

三角形の内角の大小は，対辺の大小とリンクします。

つまり， $C<B<A$ **ということになります。**

C **をメインで評価するのが目的なので，見やすさ重視で** $C=\theta$ **とメインの角度に名前をつけたいと思います。**

すると，(2) から $A=2\theta$ **で，** $A+B+C=180^\circ$ **であることから**
$B=180^\circ-3\theta$ **となり，先ほどの** $C<B<A$ **から**

$$\theta<180^\circ-3\theta<2\theta$$

が得られます。

左側から， $4\theta<180^\circ$**，すなわち** $\theta<45^\circ$ **が得られて半分は解決します。**

ただ，右側の不等式からは， $180^\circ<5\theta$**，すなわち，** $36^\circ<\theta$ **と示すべき不等式よりも甘い評価が出てきます。**

この甘い不等式の精度を上げることを考えます。

つまり，この甘い不等式の出どころである， $B<A$ **の精度を上げるわけです。**

示すべき不等式の結果を観察してみると， A **は大体** 80° ～ 90° **ぐらいになりそうです。**

つまり， $B<(80^\circ\sim 90^\circ$ ぐらいの角度) **と評価していたのが甘かったわけで，(1) にもっと厳しい評価である，** $B<60^\circ$ **という結果がありますからこれを用いてみると**

$180^\circ-3\theta<60^\circ$**，すなわち** $\theta>40^\circ$ **が得られ，解決です。**

【解 3】(3) について

(3) 三角形の内角の大小は，対辺の長さの大小と対応する。

ゆえに，$C<B<A$ …③

$C=\theta$ とおくと，$A=2\theta$，$B=180^\circ-3\theta$

③ より，$\theta<180^\circ-3\theta<2\theta$

左側の不等式から，$4\theta<180^\circ$，すなわち $\theta<45^\circ$ …④ を得る。

一方 (1) より，$B<60^\circ$ であることから，$180^\circ-3\theta<60^\circ$

これより，$3\theta>120^\circ$，すなわち $\theta>40^\circ$ …⑤ を得る。

④，⑤ より，$40^\circ<\theta<45^\circ$，すなわち $40^\circ<\angle C<45^\circ$ が成立する。

【総括】

裸の角度に対して僕らができることはほとんどありません。

$\cos$ や $\sin$ の服を着せることで長さと角度が結びつきます。

【解 3】は少々大げさで，結局は (1) の不等式を用いるわけですから本質的には大きくは変わりません。

不等式の精度を上げるためには？という勉強のための解法です。