

ベクトルの三角不等式

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{p}$ を空間内のベクトル, t を実数とする。

(1) 次の等式, 不等式を示せ。

$$(ア) \quad |t\vec{x}| = |t||\vec{x}|$$

$$(イ) \quad |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

(2) 不等式

$$|\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{x} - \vec{y}| \geq 2|\vec{y}|$$

を示し, 等号はどのような場合に成り立つか調べよ。

(3) 正の実数 R に対し, 次の2つの不等式

$$|\vec{x} + \vec{p}| + |\vec{x} - \vec{p}| \leq R$$

$$|\vec{y} + \vec{p}| + |\vec{y} - \vec{p}| \leq R$$

が成り立つとき, $0 \leq t \leq 1$ であれば, $\vec{z} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ に対しても

$$|\vec{z} + \vec{p}| + |\vec{z} - \vec{p}| \leq R$$

が成り立つことを示せ。

< '97 信州大 >