ベクトルの三角不等式

$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{p}$ を空間内のベクトル , t を実数とする。

(1) 次の等式 , 不等式を示せ。

(ア) $|t\vec{x}|=|t||\vec{x}|$

(イ) $|\vec{x}+\vec{y}|\leqq|\vec{x}|+|\vec{y}|$

(2) 不等式

$$|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{x}-\vec{y}|\geqq 2|\vec{y}|$$

を示し , 等号はどのような場合に成り立つか調べよ。

(3) 正の実数 R に対し , 次の 2 つの不等式

$$|\vec{x}+\vec{p}|+|\vec{x}-\vec{p}|\leqq R$$
$$|\vec{y}+\vec{p}|+|\vec{y}-\vec{p}|\leqq R$$

が成り立つとき , $0\leqq t\leqq 1$ であれば , $\vec{z}=t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$ に対しても

$$|\vec{z}+\vec{p}|+|\vec{z}-\vec{p}|\leqq R$$

が成り立つことを示せ。

< '97 信州大 >

【戦略】

(1) **(ア) , (イ) ともに 2 乗して考えます。**

内積の定義から , $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0$ ($\vec{a}$, $\vec{a}$ **のなす角は** 0)

$$=|\vec{a}|^2$$

であることに注意し , 計算を進めます。

(2) $|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{x}-\vec{y}|$ **を小さくしようという気持ちで , (イ) の不等式を用いていきます。**

(3) $\vec{z}=t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$ **を** $|\vec{z}+\vec{p}|+|\vec{z}-\vec{p}|$ **に代入すると**

$$|\vec{z}+\vec{p}|+|\vec{z}-\vec{p}|=|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}+\vec{p}|+|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}-\vec{p}|$$

となります。

示すべき結果が t によらない結果であることから ,

$$R=tR+(1-t)R$$

と見ることで

$$\Big|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}+\underbrace{\vec{p}}_{t\vec{p}+(1-t)\vec{p}}\Big|+\Big|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}-\underbrace{\vec{p}}_{t\vec{p}+(1-t)\vec{p}}\Big|$$

として , $t\{|\vec{x}+\vec{p}|+|\vec{x}-\vec{p}|\}+(1-t)\{|\vec{y}+\vec{p}|+|\vec{y}-\vec{p}|\}$
という条件を活かせる形を狙います。

【解答】

(1) (ア) $|t\vec{x}|^2=t\vec{x}\cdot t\vec{x}$
$=t^2|\vec{x}|^2$

よって , $|t\vec{x}|=|t||\vec{x}|$ が成立する。

(イ) 示すべき不等式の両辺は 0 以上の値であるため

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2\leqq(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2-|\vec{x}+\vec{y}|^2&=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|-(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y})\\&=2\{|\vec{x}||\vec{y}|-\vec{x}\cdot\vec{y}\}\\&=2(|\vec{x}||\vec{y}|-|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta)\ (\vec{x}\text{ , }\vec{y}\text{ のなす角を}\theta\text{ とした})\\&=2|\vec{x}||\vec{y}|(1-\cos\theta)\\&\geqq 0\end{aligned}$$

となり , $|\vec{x}+\vec{y}|^2\leqq(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$ が示され , 題意も示された。

(2)
$$\begin{aligned}|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{x}-\vec{y}|&=|\vec{x}+\vec{y}|+|\vec{y}-\vec{x}|\\&\geqq|(\vec{x}+\vec{y})+(\vec{y}-\vec{x})|\ (\because (1)\text{ の (イ)})\\&=|2\vec{y}|\\&=2|\vec{y}|\ (\because (1)\text{ の (ア)})\end{aligned}$$

となり , 示された。

等号成立は , $\vec{y}-\vec{x}$, $\vec{x}+\vec{y}$ が平行で同じ向きのとき
このとき , 正の定数 k を用いて

$$\vec{y}-\vec{x}=k(\vec{x}+\vec{y})$$

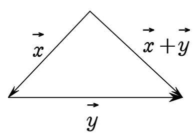
すなわち , $\vec{x}=\dfrac{1-k}{1+k}\vec{y}$ $(k>0)$ と表せる。

以上から , $\vec{x}=\dfrac{1-k}{1+k}\vec{y}$ $(k>0)$ と表せるとき , 等号が成立する。

(3)
$$\begin{aligned}|\vec{z}+\vec{p}|+|\vec{z}-\vec{p}|&=|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}+\vec{p}|+|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}-\vec{p}|\\&=|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}+t\vec{p}+(1-t)\vec{p}|+|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}-t\vec{p}-(1-t)\vec{p}|\\&=|t(\vec{x}+\vec{p})+(1-t)(\vec{y}+\vec{p})|+|t(\vec{x}-\vec{p})+(1-t)(\vec{y}-\vec{p})|\\&\leqq t|\vec{x}+\vec{p}|+(1-t)|\vec{y}+\vec{p}|+t|\vec{x}-\vec{p}|+(1-t)|\vec{y}-\vec{p}|\ (\because\text{(ア) , (イ)})\\&=t\{|\vec{x}+\vec{p}|+|\vec{x}-\vec{p}|\}+(1-t)\{|\vec{y}+\vec{p}|+|\vec{y}-\vec{p}|\}\\&\leqq tR+(1-t)R\ (\because\text{ 条件})\\&=R\end{aligned}$$

【総括】

$|\vec{x}+\vec{y}|\leqq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ という不等式を三角不等式と言います。



という三角形において , 三角形の成立条件を考えると当然の不等式です。

(3) は難しい部類に入る問題でしょうが , この三角不等式というありふれた食材でコクがある味わいになっています。