n を自然数とし，

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k}\,,\quad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\,,\quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく。また，ω を $x^3-1=0$ の 1 でない解とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k$ の値を求めよ。

(2) S_0 の値を求めよ。

＜ '97 岐阜大 改 ＞

【戦略】

(1) **二項定理の活用を匂わす $\sum$ 計算です。**

$(1+x)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ **という式を基にすれば**

$(1+\omega)^{3n}=1+{}_{3n}\mathrm{C}_1\omega+{}_{3n}\mathrm{C}_2\omega^2+\cdots\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n}\omega^{3n}$

すなわち，今回求める $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k$ **が**

$$\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k=(1+\omega)^{3n}$$

として立式できます。

あとは 1 の虚数 3 乗根 ω の基本性質 $\begin{cases}\omega^3=1\\ \omega^2+\omega+1=0\\ \omega^2=\overline{\omega}\end{cases}$ **を適宜用いて**

いくことを睨みながら式変形していきます。

(2) $S_0={}_{3n}\mathrm{C}_0+{}_{3n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n}$
$S_1={}_{3n}\mathrm{C}_1+{}_{3n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-2}$
$S_2={}_{3n}\mathrm{C}_2+{}_{3n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}$

と，具体的に書き下してみると，$S_0+S_1+S_2$ と全て加えれば

$$S_0+S_1+S_2=(1+1)^{3n}\ (=8^n)$$

ということに気がつきやすいでしょう。

また，${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ なのでよくよく観察してみると

$$S_1={}_{3n}\mathrm{C}_1+{}_{3n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-5}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-2}$$
$$S_2={}_{3n}\mathrm{C}_2+{}_{3n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-4}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}$$

S_1，S_2 は互いに逆順に並んでいるだけであり，$S_1=S_2$ であることになり，先ほどの $S_0+S_1+S_2=8^n$ は，$S_0+2S_1=8^n$ となります。

あと一つ何か関係式を Get したいところですが，(1) がヒントでしょう。

$$\begin{cases}\omega=\omega^4=\omega^7=\cdots\cdots=\omega^{3n-2}\\ \omega^2=\omega^5=\omega^8=\cdots\cdots=\omega^{3n-1}\\ 1=\omega^3=\omega^6=\omega^9=\cdots\cdots=\omega^{3n}\end{cases}$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k&=S_0+S_1\omega+S_2\omega^2\\&=S_0+S_1(\omega+\omega^2)\\&=S_0-S_1\end{aligned}$$

となり，S_0-S_1 の情報が得られるため，解決です。

【解答】

(1) $\omega^3-1=0$，すなわち $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ を満たしており，$\omega\fallingdotseq 1$ であることから，題意の ω は

$$\begin{cases}\omega^3=1 \cdots ①\\ \omega^2+\omega+1=0 \cdots ②\end{cases}$$

を満たしている。

二項定理より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k&=(1+\omega)^{3n}\\&=(-\omega^2)^{3n}\ (\because ②)\\&=(-1)^{3n}\cdot\omega^{6n}\\&=\{(-1)^3\}^n\cdot(\omega^3)^{2n}\\&=(-1)^n\ (\because ①)\ \cdots 答\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}S_0+S_1+S_2&=\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\\&=(1+1)^{3n}\ (\because \text{二項定理})\\&=2^{3n}\\&=8^n\ \cdots ③\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-(3k+1)}\\&={}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-4}+\cdots\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_2\\&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\\&=S_2\ \cdots ④\end{aligned}$$

③，④ より $S_0+2S_1=8^n$ $\cdots ⑤$

また，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k={}&{}_{3n}\mathrm{C}_0+{}_{3n}\mathrm{C}_1\omega+{}_{3n}\mathrm{C}_2\omega^2\\&+{}_{3n}\mathrm{C}_3\omega^3+{}_{3n}\mathrm{C}_4\omega^4+{}_{3n}\mathrm{C}_5\omega^5\\&\vdots\\&+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-3}\omega^{3n-3}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-2}\omega^{3n-2}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}\omega^{3n-1}\\&+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n}\omega^{3n}\end{aligned}$$

① に注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k&=({}_{3n}\mathrm{C}_0+{}_{3n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n})+({}_{3n}\mathrm{C}_1+{}_{3n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-2})\omega\\&\quad+({}_{3n}\mathrm{C}_2+{}_{3n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1})\omega^2\\&=S_0+S_1\omega+S_2\omega^2\\&=S_0+S_1\omega+S_1\omega^2\ (\because ④)\\&=S_0+S_1(\omega^2+\omega)\\&=S_0-S_1\ (\because ②)\end{aligned}$$

これより，$S_0-S_1=(-1)^n$ $\cdots ⑥$

⑤，⑥ より S_1 を消去して S_0 を求めると，$S_0=\dfrac{8^n+2\cdot(-1)^n}{3}$ $\cdots$ 答

【総括】

原題は以下のようでした。

原題

n を自然数とし，

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k}\text{，}\ S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\text{，}\ S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく。また，ω を $x^3-1=0$ の 1 でない解とする。

(1)　$S_0+S_1+S_2$ の値を求めよ。

(2)　$\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k$ の値を求めよ。

(3)　$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ。

(4)　S_0 の値を求めよ。

これだと言われたことをやっているうちに終わってしまう感が強くなってしまうため，自分で気がつきたい部分についてをカットしました。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

今回は ${}_{3n}\mathrm{C}_0+{}_{3n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n}$ という 3 つ飛ばしの二項係数の和について考えました。

話をもっと単純にして

$$T_0={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$
$$T_1={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$$

という２つ飛ばしの二項係数の和を考えてみます。

二項定理から

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(1+1)^{2n}$$
$${}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(1-1)^{2n}$$

であり，$\begin{cases}T_0+T_1=4^n\\T_0-T_1=0\end{cases}$ ですから，$T_0=2^{2n-1}$，$T_1=2^{2n-1}$ を得ます。

T_0-T_1 とは，${}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$，すなわち

$$\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\,(-1)^k$$

のことです。

1 以外の 1 の 2 乗根

２つ飛ばしで，$\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\,(-1)^k$

1 以外の 1 の 3 乗根

今回の３つ飛ばしでは $\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\,\omega^k$ に注目しました。

血が通っているように感じますね。