△ABCの重心をG，外接円の中心をOとする。

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ となるように点Hをとると，点Hは△ABCの垂心であることを示せ。

(3) O，G，Hは一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2であることを示せ。

＜ '99 山梨大 ＞

【戦略】

(1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ **を元に，** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ **を計算していけば，手なりに示すことができます。**

(2) **Hが△ABCの垂心であることを示したければ**

AH⊥BC，BH⊥CA，CH⊥AB

を示せばよいわけです。

ベクトル的には $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ **を目指すことになります。**

今，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ **という式でHが与えられているので**

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\end{cases}$$

ですから，上記内積は

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2\\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2\end{cases}$$

が和と差の積として計算でき，Oが△ABCの外心であることから

$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ **という示すべき事実に辿り着けます。**

(3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

より，$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ **であることが言えるため，題意の主張はただちにしたがいます。**

【解答】

(1) △ABCの重心がGであるため，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \cdots ①$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})\\ &=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}\\ &=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \quad (\because ①)\\ &=\vec{0}\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH} \cdots ②$ より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\end{cases} \cdots\cdots (*)$$

一方，Oは△ABCの外心なので

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}| \cdots\cdots (**)$$

(*)，(**) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\ &=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2\\ &=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\\ &=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2\\ &=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &=|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2\\ &=0\end{aligned}$$

ゆえに，AH⊥BC，BH⊥CA，CH⊥AB が言えるため，
Hは△ABCの垂心である。

(3) ①，② より

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$$

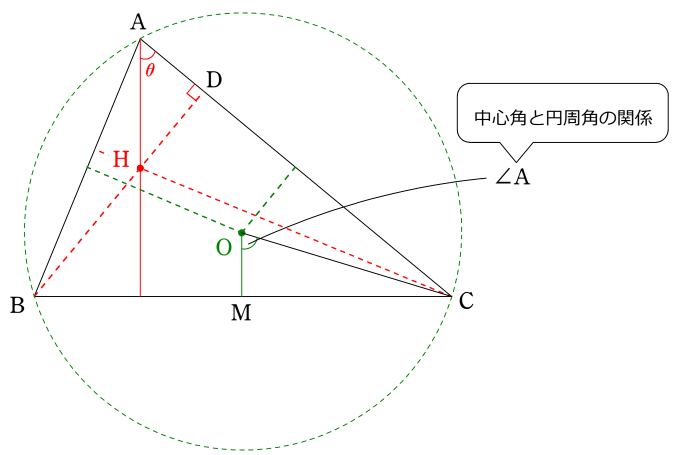
これにより，O，G，H は同一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2 である。

【総括】

△ABC の外心 O，重心 G，垂心 H は同一直線上にあり，OG : GH＝1 : 2 ということは有名事実であり，この直線は「オイラー線」と呼ばれます。

本問はベクトルでにゴリゴリ計算していきましたが，幾何的には以下のように説明できます。

以下のように記号を定めます。

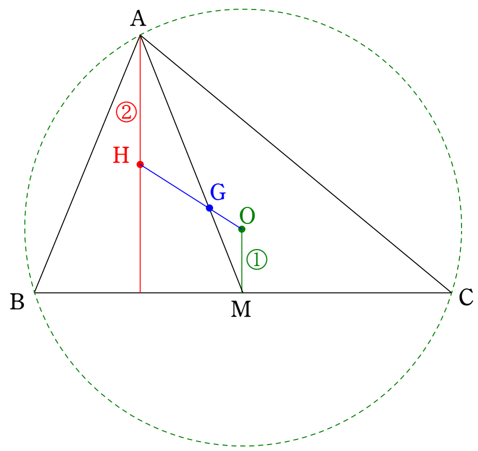


△ABC の外接円半径を R とすると，$\mathrm{OM}=R\cos A$

$\mathrm{AH}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\cos\theta}$ で，$\mathrm{AD}=c\cos A$ ，$\cos\theta=\sin C$ であるため

$$\mathrm{AH}=\frac{c}{\sin C}\cdot\cos A=2R\cos A \quad (\because\ \text{正弦定理})$$

これより，AH : OM＝2 : 1



OH と AM の交点を G とすると，△GAH ∽ △GMO であり，相似比が上述のように 2 : 1 であるため

$$\mathrm{AG}:\mathrm{GM}=2:1$$

となり，G は中線 AM を 2 : 1 に内分するため，△ABC の重心です。

これにより，O，G，H が同一直線上にあり，さらに上述の相似比から OG : GH＝2 : 1 となります。