O を原点とする座標平面上で考える。 0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3}\ ,\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率ででるコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0, X_1, ……, X_n を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。 X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，
$$\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{OX_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$
により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。
- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。 X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。 X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0\leqq r\leqq 200$ である。 p_r を求めよ。また，p_r が最大となる r の値を求めよ。

< ’22 東京大 >

【戦略】

長々と説明されていますが
裏が出るたびに方向を変え，表が出たらセットされている方向に進むというルールです。

事象 H：$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **方向に移動する。**(**水平方向** (horizontal))

事象 U：$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ **方向に移動する。**(**上方向** (up))

事象 D：$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ **方向に移動する。**(**下方向** (down))

と名前をつけます。

(1) **8 回進んで元の位置にいるということは** H，U，D **という事象が同じ回数だけ起こっているということに他なりません。**

(2)

□ × □ × □ × □ × □ × □ × …… □ × □ × □
H エリア U エリア D エリア H エリア U エリア D エリア …… H エリア U エリア D エリア

というイメージをもち，

H エリアに H を置いていく
U エリアに U を置いていく
D エリアに D を置いていく

と考えていきます。

事象 H，U，D **がそれぞれ** m **回ずつ起こり，裏が** $200-3m$ **回起こるわけです。**

ここから各エリアが何個あるかについて注意しながら捌いていきます。

【解答】

事象 H：$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 方向に移動する。

事象 U：$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ 方向に移動する。

事象 D：$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ 方向に移動する。

事象 ×：裏が出る

とする。

(1) X_8 が原点にあるとき，

H の回数	U の回数	D の回数	× の回数	
0	0	0	8	……①
1	1	1	5	……②
2	2	2	2	……③

というように，事象 H，U，D の起こる回数は同じである。

[1] ① のとき　全て×が起こるという 1 通り

[2] ② のとき

方向転換　方向転換　方向転換　方向転換　方向転換
□ × □ × □ × □ × □ × □
H エリア U エリア D エリア H エリア U エリア D エリア

1 個ある H をどちらの H エリアに並べるかが 2 通り
1 個ある U をどちらの U エリアに並べるかが 2 通り
1 個ある D をどちらの D エリアに並べるかが 2 通り

ゆえに，題意を満たすコインの出方は $2^3=8$【通り】

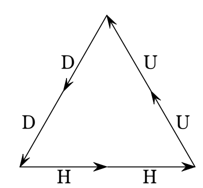
[3] ③ のとき

□ × □ × □
H エリア U エリア D エリア

2 個ある H は 1 箇所しかない H エリアに並べるしかない
2 個ある U は 1 箇所しかない U エリアに並べるしかない
2 個ある D は 1 箇所しかない D エリアに並べるしかない

ゆえに，題意を満たすコインの出方は 1 通り。

HH×UU×DD



以上 [1], [2], [3] から題意を満たすコインの出方は
$$1+8+1=10\text{【通り】}$$

コインの出方の総数は 2^8 通りあり，これらは同様に確からしい。

ゆえに，求める確率は $\frac{10}{2^8}=\frac{5}{128}$ … 答

© MathClinic

(2)　X_{200} が原点Oにあるので，事象H，U，Dの起こる回数は同じ。

したがって，r が3の倍数でないとき，$p_r=0$

以下 $r=3m$ $(m=0,1,2,\cdots,66)$ のときを考える。

Hが m 回，Uが m 回，Dが m 回，裏が $200-3m$ 回起こる

$$\underset{\text{Hエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Uエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Dエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Hエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Uエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Dエリア}}{\boxed{}}\times\cdots\cdots\ \underset{\text{Hエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Uエリア}}{\boxed{}}\times\underset{\text{Dエリア}}{\boxed{}}$$

Hエリア，Uエリア，Dエリアはそれぞれ $67-m$ ヵ所ある。

$$\text{裏が2回}\ \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Hエリア1ヵ所}\\ \text{Uエリア1ヵ所}\\ \text{Dエリア1ヵ所}\end{array}\right.$$

$$\text{裏が5回}\ \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Hエリア2ヵ所}\\ \text{Uエリア2ヵ所}\\ \text{Dエリア2ヵ所}\end{array}\right.$$

$$\vdots$$

$$\text{裏が}\ 200-3m\ \text{回} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Hエリア}\ 67-m\ \text{ヵ所}\\ \text{Uエリア}\ 67-m\ \text{ヵ所}\\ \text{Dエリア}\ 67-m\ \text{ヵ所}\end{array}\right.$$

m 個あるHを $67-m$ ヵ所あるHエリアにおく置き方は

$$h_1+h_2+\cdots\cdots+h_{67-m}=m$$

を満たす $(h_1,h_2,\cdots\cdots,h_{67-m})$ の組の決め方に等しい。

m 個の○と $66-m$ 個の仕切りの並び方を考え，仕切りで分けられる $67-m$ 個のエリアについて，各エリアにある○の個数を左側のエリアから順に $h_1,h_2,\cdots,h_{67-m}$ に対応させればよい。

したがって，${}_{m+(66-m)}\mathrm{C}_m={}_{66}\mathrm{C}_m$【通り】

Uの置き方，Dの置き方も同様にそれぞれ ${}_{66}\mathrm{C}_m$【通り】

したがって，$p_{3m}=\dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_m)^3}{2^{200}}$

以上から，$p_r=\begin{cases}0 & (r\text{が3の倍数でないとき})\\ \dfrac{\left({}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}} & (r\text{が3の倍数のとき})\end{cases}$　……答

また，$p_{3m}=q_m$ とすると $q_m=\dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_m)^3}{2^{200}}$

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{m+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_m}=\frac{66!}{(m+1)!\,(65-m)!}\cdot\frac{m!\,(66-m)!}{66!}$$
$$=\frac{66-m}{m+1}$$

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{m+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_m}>1 \iff \frac{66-m}{m+1}>1 \iff 66-m>m+1 \iff m<\frac{65}{2}$$

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{m+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_m}<1 \iff \frac{66-m}{m+1}<1 \iff 66-m<m+1 \iff m>\frac{65}{2}$$

ゆえに，

$m=0,1,2,\cdots,32$ に対して　${}_{66}\mathrm{C}_m<{}_{66}\mathrm{C}_{m+1}$

$m=33,34,\cdots,65$ に対して　${}_{66}\mathrm{C}_m>{}_{66}\mathrm{C}_{m+1}$

$${}_{66}\mathrm{C}_0<{}_{66}\mathrm{C}_1<{}_{66}\mathrm{C}_2<\cdots<{}_{66}\mathrm{C}_{32}<{}_{66}\mathrm{C}_{33}>{}_{66}\mathrm{C}_{34}>{}_{66}\mathrm{C}_{35}>\cdots>{}_{66}\mathrm{C}_{65}>{}_{66}\mathrm{C}_{66}$$

これより

$$q_0<q_1<q_2<\cdots<q_{32}<q_{33}>q_{34}>q_{35}>\cdots>q_{65}>q_{66}$$

すなわち

$$p_0<p_3<p_6<\cdots<p_{96}<p_{99}>p_{102}>p_{105}>\cdots>p_{195}>p_{198}$$

ゆえに，p_r を最大とする r の値は $r=99$ …答

【総括】

様子や要領を把握するのにかなりエネルギーを要します。

H，U，D が起こる回数が同じであるということ

裏が出た総数を3で割った余りによって進むべき方向が決まる

$$\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\cdots\cdots\ \boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}$$

裏(×)で仕切られる各エリアにおいては進める方向が決まっている

などが急所となります。

試験場においては深入りせず，いさぎよく他の問題を優先的に処理した方がよいでしょう。

© MathClinic