座標空間内の点 A$(0, 0, 2)$ と点 B$(1, 0, 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。

S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ$=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。

K の体積を求めよ。

＜ '22 東京大 ＞

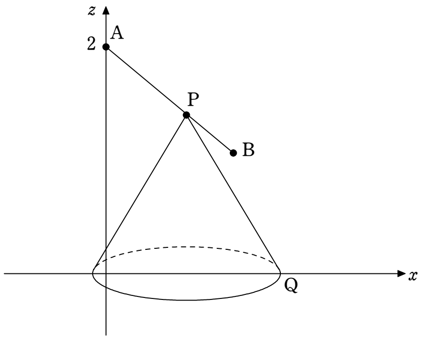
【戦略】

K をいきなり想像しようとしても難しいですから，ひとまず

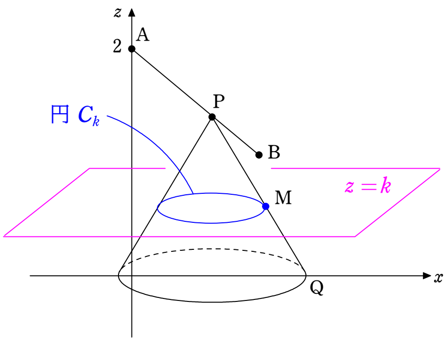
回転させる前

の状況を考えてみます。

そうなると



という位置関係で，P も固定し，Q だけ動かしてみると円錐面を描くことになり，それに伴って



というように点 M が $z=k$ という平面で動き得る範囲は円 C_k ということになります。

もちろんこれは z 軸周りに回転させる前のものですから

この円 C_k を z 軸周りに回転させたときの通過領域が

立体 K の $z=k$ による断面

ということになります。

あとはこの円 C_k の中心や半径を求めます。

z 軸回転させる際ですが，セオリー通り回転の中心からの

最大距離と最小距離を見る

という部分に目を向けることに注意しましょう。

今回は図的に場合分けがされますが，円 C_k の

「中身が詰まっていない枠のみ」を回転させる

ということになるため，結局最大距離・最小距離は同じになり，断面積は一つの式で事足ります。

【解答】

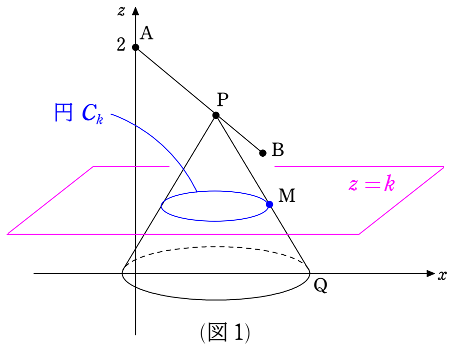
題意の立体 K を $z=k$ で切断した断面について考える。

まずこのような断面が存在するような k の範囲を求める。

回転前の状況について考える。

まずP を固定して Q だけ動かすと，線分PQ の掃過する曲面は以下の (図 1) のような円錐面となる。

それに伴い M も動き，線分 PM の掃過する曲面は (図 1) の円錐面となる。



(図 1)

ゆえに，P の z 座標は $2k$ となり，P は xz 平面における線分

$$x+z=2\ (0\leqq x\leqq 1)$$

上の点であるため

$$\mathrm{P}(2-2k, 0, 2k)$$

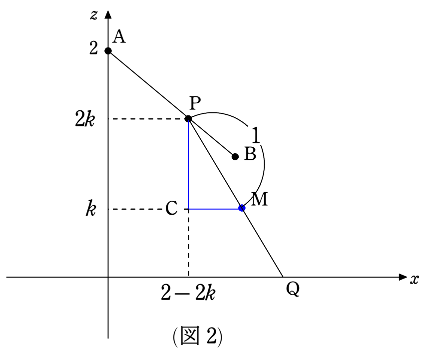
と表せる。

したがって，$1\leqq 2k\leqq 2$，すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ を得る。

このとき，K を $z=k$ で切った断面は

(図 1) の円 C_k の z 軸回転体

である。



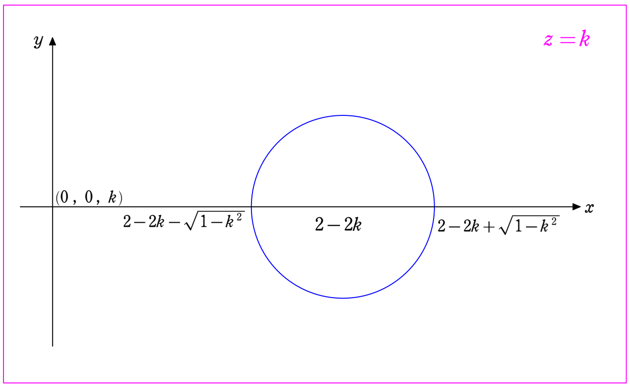
(図 2)

(図 2) において，$\mathrm{CM}=\sqrt{1-k^2}$

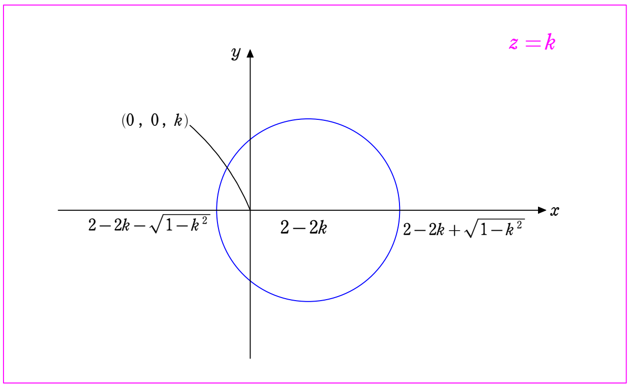
ゆえに，平面 $z=k$ において，円 C_k は

C$(2-2k, 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円

円 C_k を z 軸まわりに 1 回転してできる通過領域が題意の立体 K の $z=k$ における断面となる。



(図 3)



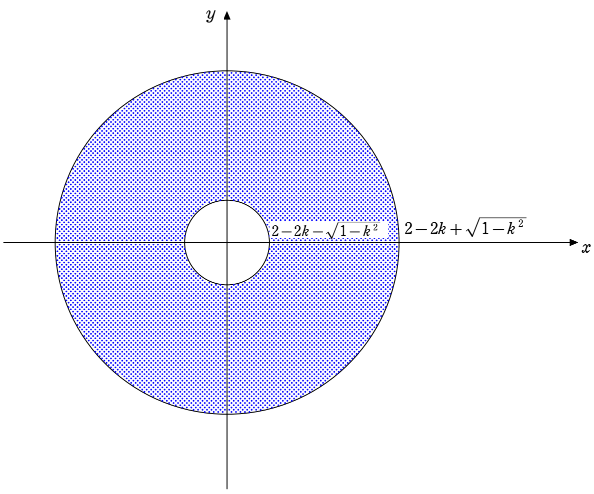
(図 4)

回転の中心である $(0,0,k)$ から C_k までの

最大距離は $2-2k+\sqrt{1-k^2}$
最小距離は $2-2k-\sqrt{1-k^2}$

(これは (図 3) , (図 4) どちらの場合でも言えることである。)

したがって，C_k の z 軸回転体，すなわち K の $z=k$ による断面は以下の (図 5) のようになり



(図 5)

その断面積 S_k は

$$S_k=\pi\left\{2(1-k)+\sqrt{1-k^2}\right\}^2-\pi\left\{2(1-k)-\sqrt{1-k^2}\right\}^2$$
$$=8\pi(1-k)\sqrt{1-k^2}$$

求める体積を V とすると

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}S_k\,dk$$
$$=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-k)\sqrt{1-k^2}\,dk$$
$$=8\pi\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk-\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk\right\}$$

【 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk$ について】

$k=\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dk=\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\ (\because \text{この積分範囲では } \cos\theta\geqq0)$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

【 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk$ について】

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-k^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2k)\,dk$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}\left[(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

したがって

$$V=8\pi\left\{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi\ \cdots 答$$

【総括】

東大らしい問題です。

立体 K そのものを想像することは難しいでしょう。

全体像にとらわれすぎず，断面を得ることに集中することが大切です。

答えが求まった後でも結局全体像は分からないのですから解く前から悩む必要はないということです。

誤解がないように言っておきますが，回転前の立体は全力で把握してください ね。

なお，今回の問題では最大距離・最小距離に関する場合分けは不要でした。

不要というより，結果的に一つの式でまとまるという感じですね。

このあたりを律儀にやろうとすると

(図 3) は $2-2k-\sqrt{1-k^2}\geqq 0$ のときを考えることになります。

$$2(1-k)\geqq\sqrt{1-k^2}$$
$$4(1-k)^2\geqq 1-k^2$$
$$5k^2-8k+3\geqq 0$$
$$(5k-3)(k-1)\geqq 0$$
$$k\leqq\frac{3}{5},\ 1\leqq k$$

$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ に注意すると，$\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{5}$，$k=1$ ということになりますが，

真面目な人ほどこのあたりに無駄に時間を使ってしまう恐れはあります。