座標平面上の曲線

$$C: y=x^3-x$$

を考える。

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

＜ '22 東京大 ＞

【戦略】

(1) **P の座標を (p, q) などとおきます。**

細かなことを抜きにして，$y=m(x-p)+q$ と傾き m を設定し，C の方程式と連立することで

$$x^3-(m+1)x+pm-q=0 \ \cdots(*)$$

という 3 次方程式が得られます。

結局何が言えればよいのかですが

任意の p, q に対して，$(*)$ が異なる 3 実解をもつような m が存在する

ということを示すのが目標になります。

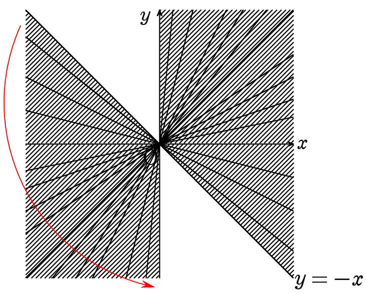
ラフに言えば「どんな P をもってきてもうまく傾き m を調節できる」ということです。

(2) **感覚的には**

面積真っ二つって，変曲点通るんじゃね？

となりますし，今回は点対称の中心点はもろ原点です。

変曲点原点における C の接線の傾きが -1 ですから



という結果は予想がつきます。

ただ，そのあたりの議論についてはケチをつけられないようにするためにはキッチリやる必要があるでしょう。

【解答】

(1) P(p, q) とする。

$x=p$ は曲線 C と相異なる 3 点で交わることはない。

そこで，P(p, q) を通る直線 ℓ を実数 m を用いて

$$y=m(x-p)+q$$

とおく。

これと曲線 C を表す方程式 $y=x^3-x$ と連立し y を消去すると

$$x^3-x=m(x-p)+q$$

整理すると，$x^3-(m+1)x+pm-q=0 \ \cdots(*)$

$(*)$ を満たす実数 x が 3 個あるための条件について考える。

$f(x)=x^3-(m+1)x+pm-q$ とおくと

$f'(x)=3x^2-(m+1)$

$f'(x)=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつことが必要で $m+1>0$，すなわち $m>-1$ が必要。

このとき，$f'(x)=3\left(x+\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)$

ゆえに，$\alpha=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$ (>0) とおくと

x	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

という増減表を得て，$(*)$ を満たす実数解は3 個であるための条件は，$f(\alpha)f(-\alpha)<0$

ここで，

$$\begin{aligned}
f(\alpha)f(-\alpha)&=(pm-q)^2-\{\alpha^3-(m+1)\alpha\}^2\\
&=(pm-q)^2-\alpha^2\{\alpha^2-(m+1)\}^2\\
&=(pm-q)^2-\frac{m+1}{3}\left\{\frac{m+1}{3}-(m+1)\right\}^2\\
&=(pm-q)^2-\frac{m+1}{3}\left\{-\frac{2}{3}(m+1)\right\}^2\\
&=(pm-q)^2-\frac{4}{27}(m+1)^3
\end{aligned}$$

$f_1(x)=x^3-(m+1)x$

とすると

$f(x)=f_1(x)+A$

という形で書けます。

$f_1(x)$ が奇関数であることに注意すると

$f(\alpha)=A+f_1(\alpha)$

$f(-\alpha)=A-f_1(\alpha)$

なので

$f(\alpha)f(-\alpha)=A^2-f_1(\alpha)^2$

つまり，示すべきは任意の実数 p, q に対して

$$\begin{cases} m>-1 \ \cdots ① \\ (pm-q)^2-\dfrac{4}{27}(m+1)^3<0 \ \cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 m が存在することであり，十分大きな m をとれば ② は満たされ，もちろん ① も満たされる。

ゆえに，任意の点 P(p, q) が条件 (i) を満たす。

(2) ℓ と C で囲まれる 2 つの図形の面積が等しい $\Leftrightarrow$ ℓ が原点を通る

ということを示す。

【$\Longleftarrow$ について】

$g(x)=x^3-x$ とする。

$$\begin{aligned} g(-x)&=(-x)^3-(-x)\\ &=-x^3+x\\ &=-g(x) \end{aligned}$$

より，$y=g(x)$ は原点について対称なグラフである。

よって，直線 ℓ が原点を通るとき，ℓ と C で囲まれた 2 つの部分の面積は等しくなる。

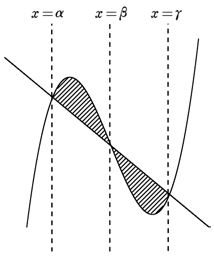
【$\Longrightarrow$ について】

$\ell : y=ax+b$ とし, $y=x^3-x$ と連立し y を消去すると

$x^3-x=ax+b$，すなわち

$$x^3-(a+1)x-b=0$$

を得て，この 3 つの実数解を α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とすると



$$\int_\alpha^\beta\{x^3-x-(ax+b)\}\,dx=\int_\beta^\gamma\{(ax+b)-(x^3-x)\}\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta\{x^3-(a+1)x-b\}\,dx-\int_\beta^\gamma\{-x^3+(a+1)x+b\}\,dx=0$$

$$\int_\alpha^\beta\{x^3-(a+1)x-b\}\,dx+\int_\beta^\gamma\{x^3-(a+1)x-b\}\,dx=0$$

$$\int_\alpha^\gamma\{x^3-(a+1)x-b\}\,dx=0$$

$$\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=0$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx\\
&=\int_\alpha^\gamma(x-\beta)(x-\gamma)\left\{\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right\}'dx\\
&=\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)\right]_\alpha^\gamma-\int_\alpha^\gamma\{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma\}'\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\,dx\\
&=-\int_\alpha^\gamma\{2x-(\beta+\gamma)\}\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\,dx\\
&=-\int_\alpha^\gamma\{2x-(\beta+\gamma)\}\left\{\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\right\}'dx\\
&=-\left[\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\cdot\{2x-(\beta+\gamma)\}\right]_\alpha^\gamma+\int_\alpha^\gamma 2\cdot\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\,dx\\
&=-\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\beta)+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_\alpha^\gamma\\
&=-\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\beta)+\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4\\
&=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(\gamma+\alpha-2\beta)
\end{aligned}$$

ゆえに，$\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(\gamma+\alpha-2\beta)=0$ で，$\alpha<\gamma$ なので，

$$\gamma+\alpha-2\beta=0$$

一方，解と係数の関係から，$\alpha+\beta+\gamma=0$ であり，これら 2 式から

$$\beta=0$$

以上から

ℓ と C で囲まれる 2 つの図形の面積が等しい $\Leftrightarrow$ ℓ が原点を通る

である。

ゆえに，$y=mx$ が C と相異なる 3 点で交わる条件について考える。

$y=mx$ と $y=x^3-x$ を連立して y を消去すると

$$x^3-x=mx$$

整理すると，$x\{x^2-(m+1)\}=0$

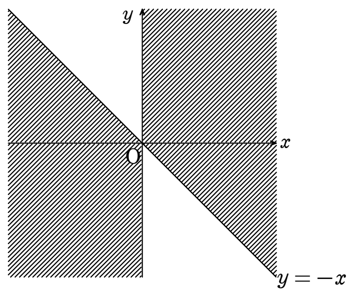
$y=mx$ が曲線 C と相異なる 3 点で交わるための条件は $m>-1$

条件 (ii) を満たす点 P の存在範囲は

　m を $m>-1$ の範囲で動かしたときの $y=mx$ の通過領域

である。

これを図示すると以下のようになる。



ただし，境界線は除くが，原点は含まれる。

【総括】

感覚的には当然ということが多いのですが，式的に証明するとなると中々大変です。

全体的に「全称命題」「存在命題」についてしっかりと受け止めているかどうかが真正面から問われています。

何が言えればいいのかということを受け止められているかどうかを試すという意図もあると思いますし，その部分はフィルターとして大いに機能すると思います。

なお，試験場的戦略であれば，多少の減点は覚悟でひとまず

真っ二つ直線 ℓ が原点を通ることは自明としてしまい，結論を出すということに重きを置く

という態度で，時間次第で残りを詰めるという作戦の方がよさそうです。