2022 年度 東京大学 理系 第 3 問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 S(x_1, y_1)，T(x_2, y_2) に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1-x_2| \geqq 1 \text{ または } |y_1-y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A$(3, 0)$，B$(3, 3)$ を考える。さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる。

(i)　点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y=x^2$ 上にある。

(ii)　点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii)　点 Q は領域 D の点である。

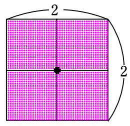
(iv)　点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている。

(3)　a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

＜ ’22 東京大 ＞

【戦略】

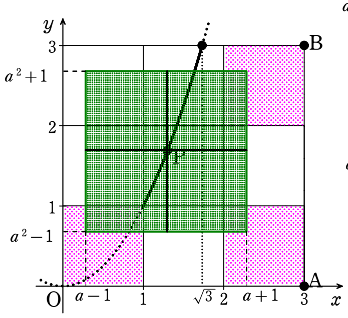
ある点から十分離れているということを

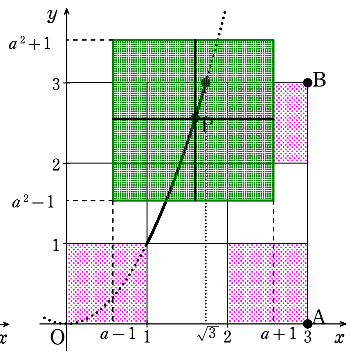


というエリアの外にいるというように，ある種余事象的に捉えていきます。

(1)　**実際に図示してみると一目瞭然です。**

(2)　**上記イメージをもちながら，P を中心とする 1 辺の長さが 2 の正方形を描いてみます。**



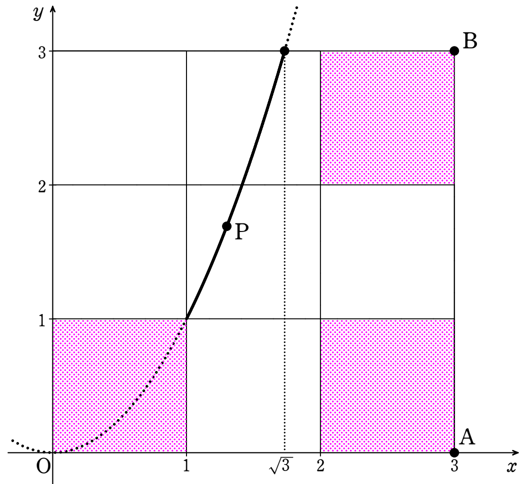


余事象的に考えるので，全体の面積 9 から打点部分の面積を除いていきますが，重複している部分については 2 回除いてしまうことになりますから，重複部分を 1 回分は足しなおす必要があります。

重複部分が 右下，左下の正方形とダブりがあるかどうかで上記の 2 パターンの場合分けが発生することに注意しながら捌いていきます。

(3)　**(2) で $f(a)$ が立式できていればボーナス的な問題です。**

【解答】



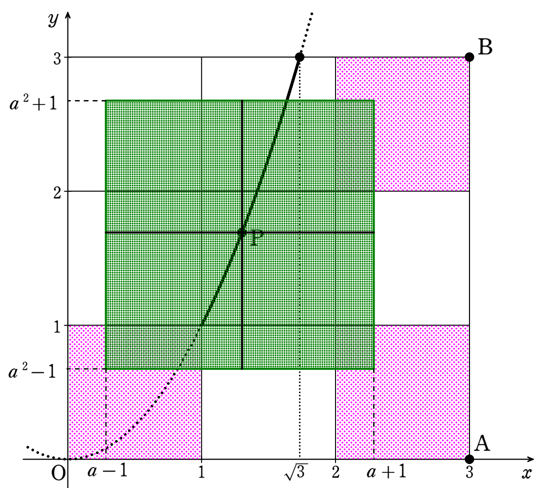
(図 1)

(1)　(図 1) の打点部の領域 (D_1 とする) にある点は条件 (ii) に反するため，点 P は (図 1) の太線部分を動き得る。

ゆえに，$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ …答

(2)　P を中心とする 1 辺の長さが 2 の正方形の内部 (D_2 とする) の点は P から十分に離れていない。

[1]　$0 \leqq a^2-1 \leqq 1$，すなわち $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき



(図 2)

D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とし，$D_1 \cap D_2$ の面積を S_3 とする。

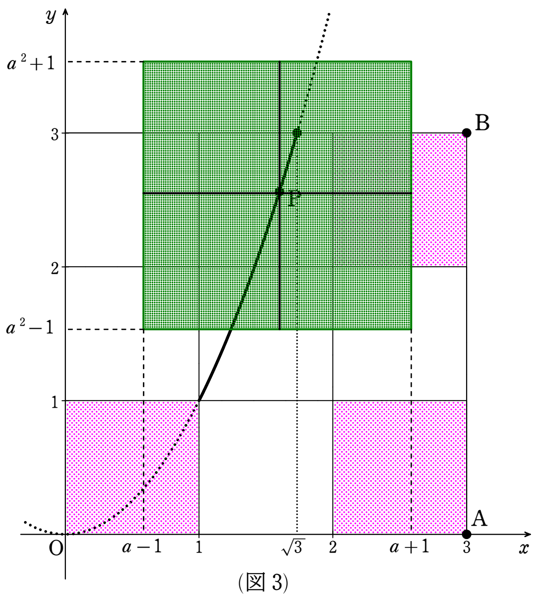
$S_1=3$，$S_2=4$

$$S_3=\{1-(a-1)\}\{1-(a^2-1)\}+\{(a+1)-2\}\{1-(a^2-1)\}+\{(a+1)-2\}\{(a^2+1)-2\}$$

$$=a^3-2a^2-a+3$$

$$\begin{aligned} f(a)&=3\cdot 3-S_1-S_2+S_3 \\ &=9-3-4+(a^3-2a^2-a+3) \\ &=a^3-2a^2-a+5 \end{aligned}$$

[2]　$1 \leqq a^2-1 \leqq 2$，すなわち　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき



(図 3)

D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とし，$D_1 \cap D_2$ の面積を S_3 とする。

$S_1=3$，$S_2=2\cdot\{3-(a^2-1)\}=8-2a^2$
$S_3=1\cdot\{(a+1)-2\}=a-1$

$$\begin{aligned} f(a)&=3\cdot3-S_1-S_2+S_3 \\ &=9-3-(8-2a^2)+(a-1) \\ &=2a^2+a-3 \end{aligned}$$

以上 [1], [2] から，

$$f(a)=\begin{cases} a^3-2a^2-a+5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 2a^2+a-3 & (\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3} \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots 答$$

(3)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$f'(a)=3a^2-4a-1=3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$ より，

$$\begin{aligned} f'(a)&\leqq f'(\sqrt{2}) \\ &=5-4\sqrt{2}<0 \end{aligned}$$

$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$$f'(a)=4a+1>0$$

したがって，
$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ の範囲で $f(a)$ は減少
$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ の範囲で $f(a)$ は増加

ゆえに，$f(a)$ を最小にする a の値は $a=\sqrt{2}$ …答

【総括】

(1) は確保したいところです。

「十分離れている」というこの問題の特有の用語の定義を把握し，様子を掴むまでにエネルギーを要するでしょう。

計算自体はそこまで重いものではありませんが，試験場補正はかかりやすい問題で，解答自体の簡潔さと実際の出来具合には大きなギャップがあると思います。