次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt\quad\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。

(2) $f(x)$ の区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

＜ ’22 東京大 ＞

【戦略】

(1) **基本事項**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

を用いながら，丁寧に微分し，増減表を得ることに集中します。

$f'(x)=\log(\cos x)(\cos x-\sin x)$ **が得られればこちらのもので**

$\log(\cos x)$ **は** $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ **の範囲で，** $\log(\cos x)\leqq 0$ **ですから**

$f'(x)$ **の符号を** Get **するためには** $\cos x-\sin x$ **の符号に集中すれば**
よいでしょう。

これにより，

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

という増減表を得ます。

(2) (1) **の増減表から** $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **を計算していくのみです。**

途中の山場としては $\displaystyle\int\frac{1}{\cos t}dt$ **の処理ですが，** $\displaystyle\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt$ **と見て**

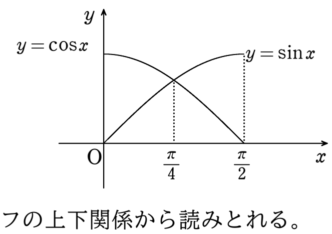
部分分数分解に持ち込む定番のトピックスです。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}f'(x)&=(-\sin x)\log(\cos x)+\cos x\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x}+\cos x\log(\cos x)\\&=\log(\cos x)(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$0<\cos x\leqq 1$ であるため

$\log(\cos x)\leqq 0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $\cos x-\sin x$ の符号に依存し，それは



というグラフの上下関係から読みとれる。

これにより，$f(x)$ の増減表が以下のように得られる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

ゆえに，$f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ で最小値をとる。

(2) (1) の増減表から，$f(x)$ の $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\log(\cos t)\,dt\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\log(\cos t)\,dt&=\Big[\sin t\log(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot\frac{(-\sin t)}{\cos t}\,dt\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2^{-\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\,dt\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\cos t}{1-\sin t}\,dt\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin t|-\log|1-\sin t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\log(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

① に代入し

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\log(1+\sqrt{2})\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\sqrt{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\log(1+\sqrt{2})\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

ゆえに，求める最小値は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\quad\cdots\text{答}$$

【総括】

やることが明確であるため，今年のセットでは落とせない問題の一つです。

緊張した試験場の中ではありますが，集中して計算して確保したい問題です。