実数 a_0, a_1, ……, a_n を係数とする多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

がすべての実数 x に対して $\{f(x)\}^2=f(f(x))$ を満たすとする。

このような $f(x)$ をすべて求めよ。

＜ '76 信州大 ＞

【戦略 1】

整式に関する関数方程式のとっかかりとしては

次数に注目する

というのが常套手段の一つです。

n 次式と設定して次数を比較する方針をとりますが, 0 次式 (定数関数) をどう扱うかについては鬱陶しいので、最初に場合分けをしてしまいます。

(今回は必要に迫られて行う場合分けというわけではありません。うるさいケースは個別検証で潰すという目的での場合分けです。)

定数関数のときは, $f(x)=C$ と設定すれば, $\{f(x)\}^2=C^2$, $f(f(x))=C$ なので,

$$C^2=C$$

であり, $C=0$, 1 を得ます。

定数関数ではないときについては, $\{f(x)\}^2$ は $2n$ 次式, $f(f(x))$ は n^2 次式ということで, $n^2=2n$ で, n が正の整数であることから $n=2$ を得ます。

あとは, $f(x)=ax^2+bx+c$ と設定し, ゴリゴリに $\{f(x)\}^2$, $f(f(x))$ を計算し, 恒等式としての処理である係数比較を行っていく路線で仕留めます。

【解 1】

$f(x)$ が n 次式であるとする。

[1] : $f(x)$ が定数関数のとき

$f(x)=C$ とおくと, $C^2=C$ より, $C=0$, 1

よって, $f(x)=0$, 1

[2] : $f(x)$ が定数関数ではないとき

$f(x)$ が n 次式 (n は正の整数) とする。

このとき, $\{f(x)\}^2$ は $2n$ 次式

$f(f(x))$ は n^2 次式

ゆえに, $\{f(x)\}^2=f(f(x))$ を満たすのであれば, $2n=n^2$, すなわち

$n=2$ ($\because$ n は正の整数)

である必要がある。

そこで, $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2&=a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2bcx+2cax^2\\&=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ca)x^2+2bcx+c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(x))&=a\{f(x)\}^2+bf(x)+c\\&=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2ca^2)x^2+2abcx+ac^2\\&\qquad+b(ax^2+bx+c)+c\\&=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+ab+2ca^2)x^2\\&\qquad+(2abc+b^2)x+ac^2+bc+c\end{aligned}$$

両辺の x^4, x^3, x^2, x の項, 及び定数項を比較して

$$\begin{cases}a^3=a^2 & \cdots\cdots ①\\2a^2b=2ab & \cdots\cdots ②\\ab^2+ab+2ca^2=b^2+2ca & \cdots\cdots ③\\2abc+b^2=2bc & \cdots\cdots ④\\ac^2+bc+c=c^2 & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

①, 及び $a\neq 0$ より, $a=1$ であり, このとき ② は任意の b で成り立つ。

③, ④, ⑤ をまとめると $\begin{cases}b^2+b+2c=b^2+2c & \cdots\cdots ③'\\2bc+b^2=2bc & \cdots\cdots ④'\\c^2+bc+c=c^2 & \cdots\cdots ⑤'\end{cases}$

③′ より, $b=0$ であり, このとき ④′ は任意の c で成り立つ。

⑤′ より, $c=0$

以上から, ①, ②, ③, ④, ⑤ が成り立つような a, b, c の値の組は

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$$

[1], [2] より, 求める $f(x)$ は

$$f(x)=0,\ 1,\ x^2\ \cdots 答$$

【戦略 2】

定数関数ではないとき，$f(x)=X$ という置き換えにより

$\{f(x)\}^2=f(f(x))$ という等式から，$X^2=f(X)$ を得ることになります。

このことから，ウルサイことを抜きにすれば

f は持ち込まれた X という値を X^2 という値にして返す関数

ということになり，$f(x)=x^2$ という構造に辿り着けます。

注意すべき点としては

任意の x に対して $\{f(x)\}^2=f(f(x))$ が成立する

という条件を X に関する条件に書き換えると，$f(x)=X$ という置き換えにより

任意の X (ただし X は $f(x)$ の値域内の値) に対して $X^2=f(X)$ が成立する

というように，置き換えた文字に対する翻訳で条件も書き換える必要があるということです。

【解 2】部分的別解　～【解 1】の [2] の場合について ～

[2]：$f(x)$ が定数関数ではないとき

$X=f(x)$ とおくと，$X^2=f(X)$

$f(x)$ は定数関数でないので，

少なくとも異なる 2 つの値 α，β $(\alpha<\beta)$ をとる。

$f(x)$ は連続関数であるので，

$f(x)$ は少なくとも $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$ の範囲にある全ての値をとる。

すなわち，

X は少なくとも $\alpha \leqq X \leqq \beta$ の範囲にある全ての値をとる

ということになる。

ゆえに，

$$X^2=f(X) \cdots (*)$$

は $\alpha \leqq X \leqq \beta$ を満たす任意の X に関して成り立つ。

このような関数 $f(x)$ は $f(x)=x^2$ しかありえない。

なぜなら，もし $f(x)$ が x^2 ではないとすると，$(*)$ は方程式ということになり，$(*)$ の解は $\alpha \leqq X \leqq \beta$ を満たす全ての X ということになる。

これは $(*)$ が有限次方程式であり，その実数解の個数が有限個であることに矛盾する。

逆に，$f(x)=x^2$ のとき，

$$\{f(x)\}^2=x^4,\quad f(f(x))=f(x^2)=(x^2)^2=x^4$$

となり，題意を満たす。

したがって，$f(x)$ が定数関数ではないときは $f(x)=x^2$

【総括】

実際には【解 1】の方針でゴリゴリ押していくのが試験場での現実的な路線でしょう。

【解 2】は計算の要素はほとんどありませんが，詰めるべき部分は意外とありますね。