関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，全ての実数 x，y について等式

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$$

が成り立つとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) a を実数とする。$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であることを示せ。

(3) $f'(0)=3$ であるとする。$f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

＜ '18 佐賀大 ＞

【戦略】

(1) **ターゲットである $f(0)$ が登場するように試しに $x=y=0$ とでも入れてみると**

$$f(0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1$$

で，$f(0)=0$ となり即解決です。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **という極限値が有限確定すれば，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であり，その極限値を $f'(a)$（＝微分係数）と呼びます。**

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ という極限値が有限確定することを目指していきます。

この極限の $f(a+h)$ の処理で与えられた等式を用いていきます。

(3) **(2) が正しく計算できれば $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ という極限値は**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(0)\cos a$$

となっていると思います。

これが意味するところは，任意の実数 a に対して $f'(a)=f'(0)\cos a$ ということです。

文字は a に拘る必要はなく，

任意の実数 x に対して，$f'(x)=f'(0)\cos x$

ということが言えます。

条件 $f'(0)=3$ から，$f'(x)=3\cos x$ となり，ここからは手なりに $f(x)$ も求まるはずです。

【解答】

(1) $f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$ ⋯(＊)

(＊) において $x=y=0$ とすると

$$f(0+0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1$$

これより，$f(0)=0$ ⋯答

(2) (＊) より，$f(a+h)=f(a)\cos h+f(h)\cos a$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{f(a)\cos h+f(h)\cos a-f(a)}{h}\\&=\frac{f(h)}{h}\cdot\cos a-\frac{1-\cos h}{h}\cdot f(a)\\&=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\cdot\cos a-\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}\cdot f(a)\\&=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\cdot\cos a-\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}\cdot f(a)\\&=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\cdot\cos a-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}\cdot f(a)\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\\&=f'(0)\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(0)\cos a$ ⋯(☆)

つまり，任意の実数 a に対して，

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定値として存在する

ということになり，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能である。

(3) (☆)，及び $f'(0)=3$ という条件より，

任意の実数 a に対して，$f'(a)=3\cos a$

これは任意の実数 x に対して $f'(x)=3\cos x$ であることを意味する。

よって，$f'(x)=3\cos x$ ⋯答

これより，$f(x)=3\sin x+C$

(1) より，$f(0)=0$ であることから，$C=0$

ゆえに，$f(x)=3\sin x$ ⋯答

【総括】

何題かやっているうちにこの手の問題のシナリオが入ってくるでしょう。

「ハイハイ，これね」という感想が出てくるようになりましょう。