

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$$

を満たしているとする。

関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ は全ての x の値で微分可能であることを証明せよ。
- (2) 関数 $f(x)$ を求めよ。

< '89 東京工業大 >

【戦略】

例題とほとんど同じなのですが、 $f'(0)$ の値が具体的に与えられていないため、場合分けが発生します。

【解答】

- (1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y) \cdots (*)$ において $y=0$ とすると

$$f(x)=f(x)+f(0)+f(x)f(0)$$

これより、 $\{f(x)+1\}f(0)=0$

- [1] $f(0) \neq 0$ のとき、 $f(x)=-1$ (定数関数)

このとき、 $f'(x)=0$ で $f(x)$ は微分可能である。

- [2] $f(0)=0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(x)+f(h)+f(x)f(h)-f(x)}{h} \quad (\because *) \\ &= \frac{f(h)}{h} \cdot \{1+f(x)\} \\ &= \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \cdot \{1+f(x)\} \end{aligned}$$

$x=0$ で微分可能であるという条件から、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$
という極限值は存在し、それが $f'(0)$ と呼ばれる。

よって、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(0) \{1+f(x)\}$$

となり、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限が有限確定値として存在する。

[1], [2] より、いずれにせよ、 $f(x)$ はすべての実数 x に対して微分可能である。

- (2) [1] のとき

$f(x)=-1$ (定数関数) であり、任意の x, y に対して $(*)$ を満たし、題意を満たす。

- [2] のとき

$$f'(0)=a \text{ とおくことで, } f'(x)=a \{1+f(x)\}$$

$$f'(x)-af(x)=a \text{ で, 両辺 } e^{-ax} \text{ をかけると}$$

$$e^{-ax} f'(x) - a \cdot e^{-ax} \cdot f(x) = a e^{-ax}$$

$$\text{これより, } \{e^{-ax} f(x)\}' = a e^{-ax}$$

$$\text{ゆえに, } e^{-ax} f(x) = -e^{-ax} + C \quad (C \text{ は定数})$$

$$f(0)=0 \text{ のときを考えているため, } C=1 \text{ を得る。}$$

$$\text{これより, } e^{-ax} f(x) = -e^{-ax} + 1$$

$$\text{ゆえに, } f(x) = -1 + e^{ax}$$

$$\text{以上から, } f(x) = \begin{cases} -1 & (\text{定数関数}) \\ e^{ax} - 1 & (a \text{ は定数}) \end{cases} \quad \cdots \text{ 答}$$

【総括】

話の進め方をしっかりと整理しましょう。

結果だけ見て、「合っている気になる」ということが起こりやすい問題です。