関数 $f(x)$ は任意の実数 x，y に対して

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)+f(y)$$

を満たし，$x=0$ で微分可能で，$f'(0)=1$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ はつねに微分可能であることを示せ。
(3) $f(x)$ を求めよ。

＜ '94 芝浦工業大 ＞

【戦略】

(1) **ターゲットである $f(0)$ が登場するように試しに $x=y=0$ とでも入れてみると**

$$f(0)+f(0)^2=2f(0)$$

であり，$f(0)\{f(0)-1\}=0$ となり，$f(0)=0$，1 という 2 通りの可能性があります。

絞りきるためにもう一つぐらい代入することを考え，$x=1$，$y=0$ ぐらいで考えてみると

$$f(1)+f(1)f(0)=f(1)+f(0)$$

であり，$f(0)\{f(1)-1\}=0$ となります。

この辺りで，y だけ 0 とすると，

$$f(0)\{f(x)-1\}=0$$

ということに気がつくでしょう。

$f(x)=1$ (定数関数) とすると，$f'(x)=0$ ということになってしまい条件 $f'(0)=1$ に反しますから，$f(0)=0$ と確定します。

(2) **$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ という極限値が有限確定すれば，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であり，その極限値を $f'(a)$ (＝微分係数) と呼びます。**

常に微分可能であることを示すためということは，

任意の実数に対して微分係数が存在する

ということを示せばよいわけです。

別に a という文字に拘る必要はなく，任意の実数 x に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

という極限値が有限確定するということを示します。

その際の $f(x+h)$ の部分の処理で，与えられた関係式を用いて捌いていくことになります。

詳しい計算は【解答】の中でやりますが

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1-f(x)$$

という結果となり，任意の x に対して $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限値が有限確定します。

(3) **(2) で考えた極限値が $f'(x)$ (導関数) と呼ばれ，$f'(x)=1-f(x)$ という微分方程式となります。**

経験があれば，$f'(x)+f(x)=1$ の両辺に e^x をかけることで分かりやすく捌いていけます。

【解答】

(1) $f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)+f(y)$ $\cdots(*)$

$(*)$ において $y=0$ とすると

$$f(x)+f(0)f(x)=f(x)+f(0)$$

これより，$\{f(x)-1\}f(0)=0$

$f(0)\neq 0$ と仮定すると，

$$f(x)=1 \text{ (定数関数)}$$

ということになり，任意の x に対して，$f'(x)=0$ となってしまい，$f'(0)=1$ であることに反する。

ゆえに，$f(0)=0$ …答

(2) $(*)$ より，$f(x+h)=f(x)+f(h)-f(x)f(h)$

すなわち，$f(x+h)-f(x)=f(h)\{1-f(x)\}$

$$\therefore\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}\cdot\{1-f(x)\}$$

ここで，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$
$$=f'(0)$$
$$=1$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1-f(x)$ $\cdots(☆)$

つまり，任意の実数 x に対して，

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が有限確定値として存在する

ということになり，$f(x)$ は全ての実数 x に対して微分可能である。

(3) (☆) より，$f'(x)=1-f(x) \iff f'(x)+f(x)=1$

両辺 e^x をかけると，$e^xf'(x)+e^xf(x)=e^x$

$$\{e^xf(x)\}'=e^x$$

$e^xf(x)=e^x+C$ (C は定数) であり，$x=0$ を代入すると

$f(0)=C+1$ で，(1) より $C=-1$ を得る。

ゆえに，$e^xf(x)=e^x-1$ であり，

$$f(x)=1-\frac{1}{e^x}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

普段

$$(\sin x)' = \cos x$$

などと公式を用いて微分していますが，本来の微分というのは

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{(1+\cos h)}\frac{\sin h}{h}\right\}\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

という極限計算をすることです。

毎回毎回この極限計算をしていたら大変ですから，我々はこの極限計算の結果を公式として覚えて使っていたに過ぎません。

つまり普段我々は

「微分せずに微分していた」

というわけです。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

最後に現れる，$f'(x)+f(x)=1$ の両辺に e^x をかける方針は「積分因子法」と呼ばれる有名手段です。

この路線を訊く場合は大抵誘導がつきますが，ノーヒントでもできるようにしておくと心強いでしょう。

$f'(x)+A(x)f(x)$ という形に対しては，$e^{\int A(x)\,dx}$ をかけると上手くいきます。
（この $e^{\int A(x)\,dx}$ を積分因子と言います。）

例：$f'(x)+xf(x)$ に対しては $e^{\frac{1}{2}x^2}$ をかけると

$f'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}+x\cdot f(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ となり，これは

$$\left\{e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)\right\}'$$

とまとまります。

（積の微分法を用いると元に戻ることを確認してみてください）