n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。

以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

(1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は何通りあるか。

(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

(3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

＜ '96 東京大 ＞

【略解】

(1) n 個のボールの行先は各々 3 通りあるため

3^n【通り】…答

(2) n 個の〇と 2 本の仕切りの並べ方を考えて

$${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}\text{【通り】…答}$$

(3) (i) 空箱が 2 つあるとき

箱に区別があれば，3 通りだが，実際には 3 箱の区別はない。よって，1 通り

(ii) (i) 以外のとき

求める場合の数を a 通りとする。

この a 通りに対して，箱に区別をつけると a 通りそれぞれに対して 3! 通り分の区別が発生する。

これより，$a\cdot 3!=3^n-3$ であるため，$a=\dfrac{3^n-3}{6}$

(i)，(ii) より，$1+\dfrac{3^n-3}{6}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$【通り】…答

(4) $n=6m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ として

$\begin{cases} x+y+z=6m \\ x\leqq y\leqq z \end{cases}$ を満たす非負整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数を求める。

[1] $x=y=z$ のとき $(x,\ y,\ z)=(2m,\ 2m,\ 2m)$ という 1 通り

[2] $x=y<z$，または $x<y=z$ のとき

$\{0,\ 0,\ 6m\}$，$\{1,\ 1,\ 6m-2\}$，……，$\{3m,\ 3m,\ 0\}$

という $3m+1$ 通りから，$\{2m,\ 2m\}$ を除く $3m$ 通り

[3] $x<y<z$ のとき

このときの $(x,\ y,\ z)$ の組の総数を b 通りとする。

[1]，[2]，[3] で箱に区別を付けたものの総数が (2) で考えた

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}\left(=\frac{(6m+2)(6m+1)}{2}\right)\text{【通り】}$$

となるため

$$1+(3m)\cdot\frac{3!}{2!1!}+b\cdot 3!=(3m+1)(6m+1)$$

これより，$b=3m^2$ を得る。

以上 [1]，[2]，[3] から，$1+3m+3m^2$ 通りであり，$n=6m$ すなわち $m=\dfrac{n}{6}$ であることを考えると

$$\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1\text{【通り】…答}$$