$x+y+z=n$（n は正の整数）を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について次の問いに答えよ。

⑴　$n=19$ のとき，$(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか。
そのうち
$x,\ y,\ z$ のいずれか 2 つが等しい組
$x \leqq y \leqq z$ を満たす組
はそれぞれ何通りあるか。

⑵　n が 6 の倍数であるとき，$x \leqq y \leqq z$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか。

＜ ’12 岐阜薬科大 ＞

【戦略】

玉と仕切りの問題に帰着させれば例題や類題 1 と同様の話になります。

⑴，⑵ **ともに厄介なのは** $x \leqq y \leqq z$ **のときです。**

ひとまず，等号の個数で場合分けをします。

つまり

(i)　$x=y=z$
(ii)　$x=y<z$ または $x<y=z$
(iii)　$x<y<z$

と場合分けをして考えていきます。

その中でも $x<y<z$ **の場合が鬱陶しいのですが，ひとまず** a **通りなどとして，この** a **通りを並べ替えることを考えます。**

【解答】

⑴　19 個の区別のないボールを，X，Y，Z の 3 人で分ける方法の総数を考える。
ただし，3 人とも少なくとも 1 つはボールをもらうとする。

$$\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc}^{x\text{個}}\,\Big|\,\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc}^{y\text{個}}\,\Big|\,\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc}^{z\text{個}}$$

これは 19 個のボールを一列に並べ，18 ヶ所の隙間から 2 ヶ所に区切り線を引く方法の総数を考えればよく

$${}_{18}\mathrm{C}_2=153\text{【通り】}\cdots\text{答}\ \cdots\cdots ①$$

また，$x,\ y,\ z$ のいずれか 2 つが等しいものについて，数字の組み合わせは

$$\{1,\ 1,\ 17\},\ \{2,\ 2,\ 15\},\ \cdots\cdots,\ \{9,\ 9,\ 1\}\cdots(*)$$

の 9 組あり，各組において並べ替えを考えればよく，$(x,\ y,\ z)$ の組の総数は

$$9\times\frac{3!}{2!\cdot 1!}=27\text{【通り】}\cdots\text{答}\ \cdots\cdots ②$$

> **注意**　$n=19$ のとき，$x=y=z$ となることはないので，
> この 27 通りの中には重複はありません．

また，$x \leqq y \leqq z$ となるものについて考える。

(i) $x=y=z$ となる組はない

(ii) $x,\ y,\ z$ のうち 2 つだけが等しい組について

$(*)$ の各組において数の小さい方から $x,\ y,\ z$ とすればよく，

9 通り

例：$\{1,\ 1,\ 7\}\to(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 7)$
$\{9,\ 9,\ 1\}\to(x,\ y,\ z)=(1,\ 9,\ 9)$ というように考える。

(iii) $x<y<z$ となる場合

この場合の数を a 通りとして，この並べ替えを考えると，
$x,\ y,\ z$ が異なる組 $(x,\ y,\ z)$ は $a\times 3!=6a$【通り】

すると，①，② より，$6a+27=153$ であり，これより，

$$a=21$$

を得る。

以上 (i)，(ii)，(iii) より，$x \leqq y \leqq z$ を満たす組は，

$$0+9+21=30\text{【通り】}\cdots\text{答}$$

(2) n が 6 の倍数のとき，$n=6m$ （m は自然数）とおける。

(i) $x=y=z$ となる組について

$(x, y, z)=(2m, 2m, 2m)$ の

1 通り … ③

(ii) x, y, z のうち 2 つだけが等しい組について

$\{1, 1, 6m-2\}, \{2, 2, 6m-4\}, \cdots\cdots, \{3m-1, 3m-1, 2\}$

の $3m-1$ 組から $\{2m, 2m, 2m\}$ を除いた $3m-2$ 組あり，
各組において小さい順に x, y, z を対応させればよく，
(x, y, z) の組は $3m-2$【通り】… ④

(iii) $x<y<z$ となる組について

この場合の数を b 通りとすると，この b 通りの並べ替えを
考えれば，x, y, z が異なる組 (x, y, z) は

$$b\times 3!=6b \text{【通り】} \cdots ⑤$$

一方，(x, y, z) の総数は

$${}_{6m-1}\mathrm{C}_2=\frac{(6m-1)(6m-2)}{2}=18m^2-9m+1\text{【通り】}$$

③，④，⑤ より，

$$1+(3m-2)\cdot\frac{3!}{2!1!}+6b=18m^2-9m+1$$

整理すると，$6b=18m^2-18m+6$ となり，

$$b=3m^2-3m+1$$

を得る。

以上 (i)，(ii)，(iii) より $x\leqq y\leqq z$ を満たす組は

$$1+(3m-2)+(3m^2-3m+1)=3m^2 \text{【通り】}$$

今，$n=6m$ であるから，$m=\frac{n}{6}$ で，求める場合の数は

$$\frac{n^2}{12}\text{【通り】} \cdots \text{答}$$

【総括】

不定方程式の解の個数という形で訊かれることもよくあります。

同じ話題だとカテゴライズしておく必要がありますね。

随所でカロリーの高い考え方が出てきますが，消化不良を起こさないよう
自分のペースで整理しましょう。

今回の (3) は x, y, z は正の整数ということでしたが，0 も許されるという設定であっても，同様に処理できますし，その場合は【類題 1】で紹介した漸化式を用いて処理することも可能です。

なお，その設定は 1996 年度の東大後期で出題されています。