組分け問題【類題１】

　次の問いに答えよ。ただし，同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいものとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

＜ ’02 千葉大 ＞

【戦略】

(1)　**愚直に数え上げるにしても，ある程度は整理していきながら考えたいところです。**

ここでは，空箱の個数で分類して数え上げていきます。

(2)　**例題同様，〇と仕切りの並べ方と対応づけます。**

空箱の存在が許されているため，

A　　B　　C　　　　D
〇 〇 ｜ ｜ 〇 〇 〇 ｜ 〇 〇 〇 〇 〇

→　A：2 個，B：0 個，C：3 個，D：5 個

というパターンもあり得ます。

〇と仕切りを置く場所を $10+3=13$ 個準備し，そこから仕切りをおく 3 ヵ所を選ぶ ${}_{13}C_3$ 通りということになります。

(3)　**赤の入れ方，白の入れ方をそれぞれ求めればよいでしょう。**

【解答】

(1)　以下 4 つの箱に入っている玉の個数が a 個，b 個，c 個，d 個 $(a \leqq b \leqq c \leqq d)$ であるとき，(a, b, c, d) と表し，0 個の場合は表記を省略する。

空箱が 3 つのとき ……1 通り

空箱が 2 つのとき ……$(1, 9)$，$(2, 8)$，$(3, 7)$，$(4, 6)$，$(5, 5)$

空箱が 1 つのとき ……$(1, 1, 8)$，$(1, 2, 7)$，$(1, 3, 6)$，$(1, 4, 5)$
$(2, 2, 6)$，$(2, 3, 5)$，$(2, 4, 4)$
$(3, 3, 4)$

空箱が 0 個のとき ……$(1, 1, 1, 7)$，$(1, 1, 2, 6)$，$(1, 1, 3, 5)$
$(1, 1, 4, 4)$，$(1, 2, 2, 5)$，$(1, 2, 3, 4)$
$(1, 3, 3, 3)$，$(2, 2, 2, 4)$，$(2, 2, 3, 3)$

という合計 23 通り…答

(2)　4 つの箱を A，B，C，D と区別する。

また，10 個の〇と 3 本の仕切りを並べ，4 領域に分ける。

このとき，

　　左側の領域から順に A，B，C，D に入る玉の取り分

と定める。

10 個の〇，3 本の仕切りの並べ方は

$${}_{13}C_3=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1}=286 \text{【通り】…答}$$

(3)　引き続き，4 つの箱を A，B，C，D と区別する。

6 個の赤玉の A，B，C，D への入れ方は (2) と同様に
6 個の〇と 3 本の仕切りの並べ方を考えて，

$${}_{9}C_3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84 \text{【通り】}$$

4 個の白玉の A，B，C，D への入れ方も (2) と同様に
4 個の〇 と 3 本の仕切りの並べ方を考えて

$${}_{7}C_3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35 \text{【通り】}$$

以上から，$84\cdot 35=2940$【通り】

【総括】

(1) が一番厄介かもしれません。

玉に区別なし

箱に区別なし

空箱あり (個数制限なし)

の場合，直接数える以外の方法で言えば，漸化式を立てるという方針が考えられます。

定義域など細かなことを抜きにして

n 個の区別のつかない玉を，m 個の区別のつかない箱に入れる入れ方を

$$f(n\,,\,m)$$

とおきます。(空箱は許す)

このとき，

$$f(n\,,\,m)=f(n\,,\,m-1)+f(n-m\,,\,m)\ \cdots(*)$$

が成立します。

証明

(i)　空箱が少なくとも 1 つあるとき

その空箱を除いた $m-1$ 箱に残った n 個の玉を入れることになり，その分配の仕方は $f(n\,,\,m-1)$ 通り

(ii)　空箱が 1 つもないとき

各箱には少なくとも 1 つ玉が入っている状態である。

残った $n-m$ 個の玉を m 箱に分配するため，その分配の仕方は $f(n-m\,,\,m)$ 通り

(i)，(ii) は同時に起こらないため，

$$f(n\,,\,m)=f(n\,,\,m-1)+f(n-m\,,\,m)$$

が成り立つ。

$(*)$ を用いて (1) で求めるべき $f(10\,,\,4)$ を計算します。

なお，このとき，$f(n\,,\,2)$ について先に計算しておくと話が早いです。

$m=1\,,\,2\,,\,\cdots$ に対して

$f(2m\,,\,2)$ $\cdots$ {0 個，$2m$ 個}，{1 個，$2m-1$ 個}，$\cdots$，{m 個，m 個}
と分配する $m+1$ 通り

$f(2m-1\,,\,2)$ $\cdots$ {0 個，$2m-1$ 個}，{1 個，$2m-2$ 個}，$\cdots$，{$m-1$ 個，m 個}
と分配する m 通り

より，

$$\begin{cases} f(2m\,,\,2)=m+1 \\ f(2m-1\,,\,2)=m \end{cases} \quad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つことに注意して計算します。

$$\begin{aligned} f(10\,,\,4)&=f(10\,,\,3)+f(6\,,\,4) \\ &=\{f(10\,,\,2)+f(7\,,\,3)\}+\{f(6\,,\,3)+f(2\,,\,4)\} \\ &=6+\{f(7\,,\,2)+f(4\,,\,3)\}+\{f(6\,,\,2)+f(3\,,\,3)\}+2 \\ &=6+4+\{f(4\,,\,2)+f(1\,,\,3)\}+4+3+2 \\ &=6+4+3+1+4+3+2 \\ &=23 \end{aligned}$$

$f(2\,,\,4)$ は
$\{0\,,\,0\,,\,0\,,\,2\}$
$\{0\,,\,0\,,\,1\,,\,1\}$
という 2 通り

$f(3\,,\,3)$ は
$\{0\,,\,0\,,\,3\}$
$\{0\,,\,1\,,\,2\}$
$\{1\,,\,1\,,\,1\}$
という 3 通り

となります。

ただ，見ての通り正直本問程度であれば直接数え上げた方が早いでしょう。