6人の人を3つの部屋に分けたい。どの部屋にも少なくとも1人は入るものとして，分ける方法は何通りあるか。次の(1)～(3)のそれぞれの場合について答えよ。

(1) 人も部屋も区別しないで，人数の分け方だけ考えた場合。
(2) 人は区別しないが，部屋は区別して考えた場合。
(3) 人も部屋も区別して考えた場合。

＜ '99 立教大 ＞

【戦略】

(1) **例えば，**

(1人，1人，4人)，(1人，4人，1人)，(4人，1人，1人)

は

1(い～ち)	2(にぃ～)	3(さぁ～ん)
(1人，1人，4人)	(1人，4人，1人)	(4人，1人，1人)

とは数えません。

まとめて 1(い～ち)

(1人，1人，4人)，(1人，4人，1人)，(4人，1人，1人)

と数えるわけです。

(2) **人を区別しないため，「誰が」というのはどうでもよく各部屋に「何人」いるのかが問題になります。**

つまり，今度は

1(い～ち)	2(にぃ～)	3(さぁ～ん)
(1人，1人，4人)	(1人，4人，1人)	(4人，1人，1人)

と数えるわけです。

(3) **6人の人を1～6と区別をします。**
(ゼッケンをつけたと思ってください。)

各々にマイクを向けインタビューします。

「1番さん，A，B，C どの部屋に行きたいですか？」
「2番さん，A，B，C どの部屋に行きたいですか？」
⋮
「6番さん，A，B，C どの部屋に行きたいですか？」

これにより，3^6 通りの行き方(分け方)が出来上がります。

何の条件もなければこれでいいのですが，少なくとも1人は部屋にいるという条件をクリアーする必要があります。

つまり，$\begin{cases}\text{全員が1部屋に集中してしまう}\\ \text{全員が2部屋に集中してしまう}\end{cases}$ という場合は除かなければなりません。

【解答】

(1) {1人，1人，4人}，{1人，2人，3人}，{2人，2人，2人}

という3通り … 答

(2) 3つの部屋をA，B，Cとしたとき，A，B，C に入る人数をそれぞれ a，b，c とする。

組 $(a,\ b,\ c)$ の決め方を考える。

a，b，c への対応の仕方は $\{1,\ 1,\ 4\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$
をそれぞれ並べ替えて，先頭から a，b，c に対応させればよく，

$$\frac{3!}{2!}+3!+1=10\text{【通り】} \cdots \text{答}$$

(3) 6人の人に1，2，3，4，5，6 の番号のついたゼッケンを付けて区別し，部屋を A，B，C と区別する。

1番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り
2番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り
3番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り
4番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り
5番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り
6番のゼッケンの付いた人の部屋の選び方は3通り

空の部屋があれば 3^6 通りの分け方があるが，どの部屋にも少なくとも1人は入るという条件があるため，ここから

$$\begin{cases}\text{①：空部屋が2部屋}\\ \text{②：空部屋が1部屋}\end{cases}$$

という場合を各々除く。

＜ ① のような分け方について ＞

全員が1部屋に集まるような分け方であり，どの部屋に全員が集まるかが3通りある。

＜ ② のような分け方について ＞

空部屋の選び方が3通り

1番 ～ 6番のゼッケンの付いた人は，その空部屋以外の2通りの選択肢があり，2^6 通り

ただし，この 2^6 通りには全員が1部屋に集中し，空部屋が1部屋とならない2通りが含まれている。

ゆえに，② のような分け方は $3(2^6-2)$【通り】

以上から，求める分け方は

$$3^6-\{3+3(2^6-2)\}=540\text{【通り】} \cdots \text{答}$$

【戦略 2】(2) について

部屋に A，B，C という名前を付け，この部屋が人を取り込む際の
「人数の取り分」
が問題なわけです。

「取り分」が問題の場合，○と仕切りを並べ替える作戦が有効です。
（いわゆる重複組合せの問題と呼ばれます。）

今回は 6 個の ○と 2 本の仕切り（← 3 領域に分割するには 2 本の仕切り）を並べ替えることを考えます。

例えば， ○｜○ ○｜○ ○ ○ … $\begin{cases}\text{部屋 A に 1 人}\\\text{部屋 B に 2 人}\\\text{部屋 C に 3 人}\end{cases}$

というように，左から
A の人数の取り分，B の人数の取り分，C の人数の取り分
と対応させます。

今回は空部屋がありませんから

○∧○∧○∧○∧○∧○

という隙間に 2 本の仕切りを入れればよいでしょう。

【解 2】(2) について

3 部屋を A，B，C と区別する。

6 個の○と 2 本の仕切りを並べ，3 領域に分ける。

このとき，
一番左側の領域にある○の個数を A の人数
中央の領域にある○の個数を B の人数
一番右側の領域にある○の個数を C の人数
とする。

各部屋に少なくとも 1 人は入るため，

○∧○∧○∧○∧○∧○

という 5 ヵ所の隙間から 2 カ所選んで仕切りを入れればよく

$${}_5C_2 = 10 \text{【通り】} \cdots \text{答}$$

【総括】

場合の数や確率に対する苦手意識をもつ人を量産する問題の一つです。

本問に限った話ではないですが

い〜ち，にぃ〜，さぁ〜ん，……

と数えていく際に，
何を括りとして「い〜ち」とみなすのか
を見極めるのがこの分野のコツの一つです。

特に，区別があるないの話では，モデルケースを考えてみて
何を括りとして「い〜ち」とみなすのか
を考えてみると整理がつきやすいでしょう。

最後に，(3) でよくある典型的な誤答例についてふれておきます。

(3) 誤答例

少なくとも 1 部屋に人がいるので，3 部屋に誰かをまず 1 人ずつ入れる。

その入れ方は，$\begin{cases}\text{誰を入れるか } {}_6C_3 \text{ 通り}\\\text{どの部屋に入れるか } 3! \text{ 通り}\end{cases}$ で，

$${}_6C_3 \cdot 3! = 120 \text{【通り】}$$

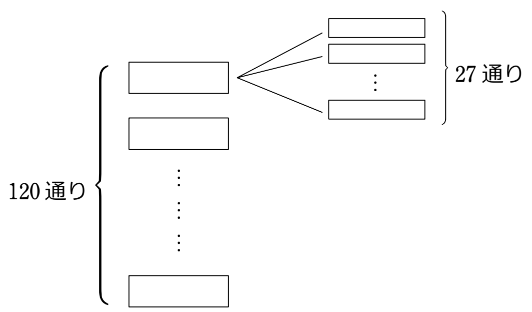
残りの 3 人は自由なので，$3^3 = 27$【通り】

よって，$120 \cdot 27 = 3240$【通り】

何がマズいかお分かりでしょうか？

大枠で言えば，120 通りと 27 通りの積としているわけですが

これは



というように，120 通りのそれぞれから 27 本の手が生えているという原理で数えているわけです。

例えば，最初の 120 通りの中には

1 番さん，2 番さん，3 番さん をそれぞれ A，B，C に入れる

というものが入っています。

4 番さん，5 番さん，6 番さんはフリーダムで 3^3 $(=27)$ 通りありますが
この 27 通りの中には例えば，

4 番さんを A に，5 番さんを B に，6 番さんを C に

入れる入れ方があります。

このとき，

A	B	C
1 番 4 番	2 番 5 番	3 番 6 番

という部屋割りになっています。

しかし，最初に入れる 3 人を 2 番，4 番，6 番とし，

2 番の人を B に

4 番の人を A に

6 番の人を C に

入れるような入れ方も最初の 120 通りに入っています。

その後，1 番，3 番，5 番はフリーダムで，3^3 $(=27)$ 通りの選択肢がありますが，例えば

1 番さんを A に，3 番さんを C に，5 番さんを B に

入れる入れ方を考えると，

A	B	C
1 番 4 番	2 番 5 番	3 番 6 番

となり，先ほどと同じ結果となってしまいます。

赤文字は「フリーダム枠」で入室した人です。

本来これらは同じ分け方としてまとめて「い～ち」と数えるべきものですが，誤答例ではこれらを別モノと捉えて，「い～ち，にぃ～，……」と数えてしまっているため，重複が発生してしまっているわけです。