a，b，p，q は正の整数とする。$a \leqq b$ である。p は 1 または素数であり，q は素数である。p と q は互いに素であるとする。

a，b，p，q が関係式

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{p}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $b-a$ が奇数であることを示せ。

(2) $a=2$，$p=1$ であるとき，b，q の値の組を全て求めよ。

(3) a，b がともに素数であるとき，a，b，p，q の値の組を全て求めよ。

＜ ’19 同志社大 ＞

【戦略】

ひとまず，(1)，(2)，(3) を通して $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{p}$ を通分し，分母をはらって得られる

$$p(a+1)(b+1)=qab \quad \cdots (*)$$

という等式を元に考えていきましょう。

(1) **$b-a$ が $(*)$ の中に現れているわけではありません。**

なので，何が言えればいいかという着地点を

$b-a$ が奇数 $\Leftrightarrow$ a，b の偶奇が異なる

と言い換えます。

そうなると，a，b の偶奇が一致すると仮定して矛盾を狙う背理法が第一感です。

a，b がともに奇数だと， $\begin{cases}(*) \text{の左辺} \cdots 4\text{の倍数} \\ (*) \text{の右辺} \cdots \text{素因数}2\text{は}1\text{個以下}\end{cases}$

で，矛盾します。

a，b がともに偶数だと， $\begin{cases}(*) \text{の左辺} \cdots \text{素因数}2\text{は}1\text{個以下} \\ (*) \text{の右辺} \cdots 4\text{の倍数}\end{cases}$

で，やはり矛盾します。

(2) **$a=2$，$p=1$ から $(*)$ は $3(b+1)=2qb$ となります。**

ここからは整数問題の常套手段の一つ

「積の形から約数を拾う」

ということを狙い，

$$(2q-3)b=3$$

としていきます。

話を明確にするために，$2q-3=\frac{3}{b}$ というように

$$(\text{整数})=(\text{分数})$$

の形として b は 3 の約数と考えると，$b=1$，3 と即 Get できます。

ただ，今回は $b \geqq a\ (=2)$ なので，$b=3$ と確定します。

(3) **(1) が強力なヒントで，a，b が偶奇の異なる素数ということは 2 が紛れ込むしかなく，大小関係的には $a=2$ となります。**

このとき，$(*)$ から $3p(b+1)=2qb$ を得ることになります。

(2) 同様，「積の形から約数を拾う」ということを狙い

$$(2q-3p)b=3p \iff 2q-3p=\frac{3p}{b} \quad \cdots (**)$$

と見てやります。

これより，b は $3p$ の正の約数ということになり

$b=1$，3，p，$3p$ ということになりますが，b が素数ということを考えると $b=3$，p となるしかありません。

【解答】

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{p}$ より，$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b}=\frac{q}{p}$

これより，$p(a+1)(b+1)=qab \quad \cdots (*)$

(1) a，b の偶奇が異なることを示せばよい。

そこで，a，b の偶奇が一致すると仮定する。

[1] a，b がともに奇数とすると，$a+1$，$b+1$ は偶数である。

したがって，$(*)$ の左辺は素因数 2 を 2 個以上もち，4 の倍数である。

しかし，$(*)$ の右辺は q が素数，a，b が奇数であるため，素因数 2 を 2 個以上もつことはなく，矛盾する。

[2] a，b がともに偶数とすると，$a+1$，$b+1$ は奇数である。

このとき，$(*)$ の右辺は素因数 2 を 2 個以上もち，4 の倍数である。

しかし，$(*)$ の左辺は p が 1 または素数，$a+1$，$b+1$ が奇数であるため，素因数 2 を 2 個以上もつことはなく，矛盾する。

[1]，[2] よりいずれにしても矛盾する。

以上から，a，b の偶奇は一致せず，$b-a$ は奇数である。

(2) $(*)$ に $a=2$，$p=1$ を代入すると

$$3(b+1)=2qb$$

すなわち，$(2q-3)b=3 \iff 2q-3=\frac{3}{b}$

$\frac{3}{b}$ が正の整数となることから，$b=1$，3

$b \geqq a\ (=2)$ という条件から，$b=3$ で，このとき $2q-3=1$

すなわち $q=2$

以上から，$(b,\ q)=(3,\ 2)$ …答

(3)　a，b が素数であり，(1) より a，b の偶奇が異なる。

条件 $a \leqq b$ を考えると，$a=2$ となるしかない。

このとき，(*) から $3p(b+1)=2qb$

これより，$(2q-3p)b=3p \iff 2q-3p=\dfrac{3p}{b}$ …(**)

$\dfrac{3p}{b}$ が正の整数となるため，素数 b は $b=3$ or p

［A］ $b=3$ のとき

(**) より，$2q-3p=p$ で，$q=2p$ を得る。

q は素数であることから，$q=2$ となるしかなく，$p=1$

［B］ $b=p$ のとき

(**) より $2q-3p=3 \iff 2q=3(p+1)$ を得る。

右辺が 3 の倍数であることから，$2q$ が 3 の倍数であり
2 と 3 が互いに素なので，q が 3 の倍数となる。

q が素数であることから，$q=3$

このとき，$p=1$ であり，$b=1$ となるが，条件 $a \leqq b$ に反する。

以上から，求める a，b，p，q の値の組は

$$(a,\ b,\ p,\ q)=(2,\ 3,\ 1,\ 2) \cdots \text{答}$$

【戦略 2】方針のみ

(1) から a が偶数の素数 2 であることは分かります。

試しに実験をしてみると，$a=2$，$b=3$ としてみると

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2\left(=\frac{2}{1}\right)$$

ということから，$(a,\ b,\ p,\ q)=(2,\ 3,\ 1,\ 2)$ という組が見つかります。

次に $b=5$ としてみると

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{9}{5}\ (\text{不適})$$

です。

$b=7$ としてみると

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{7}=\frac{12}{7}\ (\text{不適})$$

です。

この実験結果を受け，今我々としては

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\text{偶数}}{\text{素数}}\longrightarrow \text{結果が}\ \frac{\text{素数}}{\text{素数}}\left(\text{or}\ \frac{\text{素数}}{1}\right)\text{となっててほしい}$$

という現実と向き合うことになります。

実験結果を見てみると

$\dfrac{3}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{(\text{偶数})}}{\text{素数}}$ **という約分の結果，** $\dfrac{3\cdot(\text{整数})}{\text{素数}}$ **となっています。**

分子が素数となっているためには，

$\dfrac{3}{\text{素数}}$ **となる**　or　$\dfrac{\cancel{3}}{}\cdot\dfrac{}{\cancel{\text{素数}}}$ **という約分が起こって 3 が消える**

という現象が起こる必要があります。

前者の場合， $\dfrac{3}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{}$ **という現象が起こるわけです。**

これより，$b+1=2$ で $b=1$ という結果になりますが，それは無理です。

後者の場合， $\dfrac{\cancel{3}}{}\cdot\dfrac{}{\cancel{3}}$ **という形で約分が起こるしかなく，$b=3$ が確定します。**

つまり，$(a,\ b)=(2,\ 3)$ が確定し， $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=2\left(=\dfrac{2}{1}\right)$ **ということから，$(p,\ q)=(1,\ 2)$ ということも確定し，トータルとして**

$$(a,\ b,\ p,\ q)=(2,\ 3,\ 1,\ 2)$$

が得られることになります。

【総括】

$p\,(a+1)(b+1)=qab$ の形のまま約数を拾っていくとなると，クシャクシャになりかねません。

連続 2 整数が互いに素であるという部分も目につきますが，やってみると茨の道です。

qab が $(\text{素数})\cdot(\text{素数})\cdot(\text{素数})$ となっていますが，互いに異なる素数というわけではないため，対応関係を追っていくのが面倒です。

連続 2 整数が互いに素であるということを最大限生かした方針が【戦略 2】の路線です。

これは，$\dfrac{a+1}{a}\cdot\dfrac{b+1}{b}$ において，連続 2 整数が互いに素であることから

$$\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a}} \text{ や } \frac{\cancel{b+1}}{\cancel{b}} \quad \text{という約分は起こらない}$$

ということを活かそうとした路線です。

つまり，約分されるとしたら

$$\frac{}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{b+1}}{} \quad \text{という形か} \quad \frac{\cancel{a+1}}{}\cdot\frac{}{\cancel{b}} \quad \text{という形}$$

ということを考えた路線です。

上述の

$p\,(a+1)(b+1)=qab$ の形で約数を拾っていく路線は茨の道

という原因を紐解いてみると

どのペアで約分されるか（どのペアが約数倍数関係となっているか）

が分母を払ってしまったことで見えにくくなってしまうため，根本的な部分は同じでも見え方や感じ方が変わってきてしまっていると言うことができるでしょう。