素数は無限に多く存在することを証明せよ。

＜ ’73 大阪歯科大 ＞

【戦略 1】

紀元前 300 年頃に「原論」という数学書で証明された方法が有名です。

厳密には書物の中では背理法を用いてはいないようですが，背理法を用いると明確になります。

素数が p_1，p_2，…，p_n という有限個しかないと仮定し

$$P=p_1p_2\cdots p_n+1$$

という P を定めます。

P が素数としても，合成数としても，おかしなことになります。

【解 1】

n を正の整数として，素数が n 個（＝有限個）しかないと仮定する。

その素数を小さい方から p_1，p_2，……，p_n とする。

このとき，$P=p_1p_2\cdots p_n+1$ という数について考える。

P は素数，合成数のいずれかであるが，$P>p_n$ であり，P が素数であるとすると P は $p_1\sim p_n$ のいずれでもない素数ということになり，素数が n 個しかないということに矛盾する。

したがって，P は合成数ということになり，P は素因数 $p_1\sim p_n$ のどれかで割り切れることになる。

しかし，P（$=p_1p_2\cdots p_n+1$）は $p_1\sim p_n$ のどれで割っても 1 余ることになり不合理。

以上から，仮定は誤りで，素数は無限に存在する。

【戦略 2】by フィリップ・サイダック

2006年に発表された証明で，数ある証明の中でかなり簡潔な証明です。

n と $n+1$ という連続 2 整数が互いに素であるということを用いていきます。

【解 2】

n を 2 以上の整数とすると，n，$n+1$ は互いに素であるため

$N_1=n(n+1)$ は少なくとも 2 種類の素因子 p_1，p_2 をもつ。

$N_2=N_1(N_1+1)$ は N_1 が p_1，p_2 という素因子をもち，N_1+1 はそれ以外の素因子をもつことになるため，N_2 は少なくとも 3 種類の素因子 p_1，p_2，p_3 をもつ。

以降，同様の操作によって任意に多くの素因子をもつ数が得られるため素数は無数に存在する。

【総括】

この他にも様々な証明があります。

いずれにせよ初見かつノーヒントでは多くの人は太刀打ちできないでしょうが，考えてみたくなる魔力をもつ話題でしょう。

入試問題というよりは教養的な問題に近い類の問題です。