整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。

＜ '09 京都大 ＞

【戦略】

$\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy$ **は x の式です。**

両辺 x で微分することを見越せば，ひとまず，x を含む部分をインテグラルの外に摘まみだし，形を明確化することを考えます。

2 乗展開して整理すると

$$\int_0^x f(y)\,dy+x^2\int_0^1 f(y)\,dy+2x\int_0^1 yf(y)\,dy+\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

となります。

目がチカチカするかもしれませんが，

$\int_0^1 f(y)dy$，$\int_0^1 yf(y)\,dy$，$\int_0^1 y^2 f(y)\,dy$ **は全て定数ですから，結局は**

$$\int_0^x f(y)dy+kx^2+2\ell x+m=x^2+C$$

という構造になります。

つまり， $\begin{cases}\int_0^1 f(y)\,dy=k\\ \int_0^1 yf(y)\,dy=\ell\\ \int_0^1 y^2 f(y)\,dy=m\end{cases}$ （k，ℓ，m は定数） **とおきます。(定数型の処理)**

次に変数型の処理で，両辺 x で微分すると

$$f(x)+2kx+2\ell=2x$$

$$\Leftrightarrow\ f(x)=2(1-k)x-2\ell$$

と $f(x)$ の形が 1 次式であることが分かります。

これと元々の k，ℓ の出どころである $\begin{cases}\int_0^1 f(y)dy=k\\ \int_0^1 yf(y)dy=\ell\end{cases}$ **に絡んで連立方程式を処理することで，k，ℓ を特定します。**

k，ℓ が分かればコチラのもので，$\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=m$ においては m が直接出ます。

$\int_0^x f(y)dy+kx^2+2\ell x+m=x^2+C$ で $x=0$ と積分区間を潰してやれば $m=C$ なので，C も得られることになり解決です。

【解答】

与えられた等式は

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x^2+2xy+y^2)f(y)\,dy=x^2+C$$

$$\int_0^x f(y)\,dy+x^2\int_0^1 f(y)\,dy+2x\int_0^1 yf(y)\,dy+\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=x^2+C\ \cdots①$$

$$\begin{cases}\int_0^1 f(y)\,dy=k\ \cdots②\\ \int_0^1 yf(y)\,dy=\ell\ \cdots③\\ \int_0^1 y^2 f(y)\,dy=m\ \cdots④\end{cases}\quad (k,\ \ell,\ m\ \text{は定数})$$

とおくと，① は

$$\int_0^x f(y)dy+kx^2+2\ell x+m=x^2+C\ \cdots⑤$$

と表せる。

⑤ の両辺を x で微分すると，$f(x)+2kx+2\ell=2x$

つまり，$f(x)=2(1-k)x-2\ell\ \cdots(*)$

②，$(*)$ より，

$$\int_0^1 \{2(1-k)y-2\ell\}\,dy=k$$

$$\Big[(1-k)y^2-2\ell y\Big]_0^1=k$$

$$1-k-2\ell=k$$

$$2k+2\ell=1\ \cdots②'$$

③，$(*)$ より，

$$\int_0^1 \{2(1-k)y^2-2\ell y\}\,dy=\ell$$

$$\Big[\frac{2}{3}(1-k)y^3-\ell y^2\Big]_0^1=\ell$$

$$\frac{2}{3}(1-k)-\ell=\ell$$

$$k+3\ell=1\ \cdots③'$$

②′，③′ より，$k=\frac{1}{4}$，$\ell=\frac{1}{4}$ であり，$(*)$ に代入すれば，

$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

を得る。

また，④ より

$$\int_0^1 y^2\Big(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\Big)dy=m$$

$$\Big[\frac{3}{8}y^4-\frac{1}{6}y^3\Big]_0^1=m$$

$$\frac{5}{24}=m$$

⑤ において $x=0$ を代入すると，$m=C$ であるため，$C=\frac{5}{24}$

以上から，$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$，$C=\frac{5}{24}$ …答

【総括】

筋が悪いと右往左往しかねない要素はありますが，目線がブレなければ何をしてよいのかを見失うことはないでしょう。

定積分を実行した結果，生き残る文字は何なのか

ということを見据えて，形や骨格を把握するという根本的な力が大切で，メッセージ性の強い問題です。

定数型，変数型，ハイブリッド型の対応や，やり方に目が行きがちですが，いずれの土台も上述の「定積分で生き残る文字」という基本がわかっていてこその対応だということを忘れないようにしたいですね。