次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=e(x-1)-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

ただし，e は自然対数の底である。

＜ '95 大阪市立大 ＞

【戦略】

定数型，変数型の処理が混合したハイブリッド型の積分方程式です。

ひとまず，形を整えるために，定数である $\int_0^1 tf(t)\,dt$ を

$$k=\int_0^1 tf(t)\,dt \text{（ } k \text{ は定数 ）}$$

とおきます。

次に，変数型の処理である両辺微分に持ち込む準備として，邪魔者をインテグラルの外に摘まみだします。

これにより

$$f(x)=e(x-1)-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt+k$$

という関係式が得られますから，両辺 x で微分していきます。

これにより，$f'(x)=k-f(x)$ という関係式を得ます。

この微分方程式の処理については少々経験がモノを言いますが

$$f'(x)+f(x)=k$$
$$e^x f'(x)+e^x f(x)=ke^x$$
$$(e^x f(x))'=ke^x$$

というように，$f'(x)+f(x)=k$ の両辺に e^x をかけて処理します。

【解答】

$$k=\int_0^1 tf(t)\,dt \text{（ } k \text{ は定数 ）}$$

とおくと

$$\begin{aligned}f(x)&=e(x-1)-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt+k\\&=e(x-1)-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt+k \quad \cdots ①\end{aligned}$$

これより，$f(0)=k-e$ …②

また，① の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=e-\left(\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)\right)+xf'(x)\\&=e-\Big[f(t)\Big]_0^x\\&=e-\{f(x)-f(0)\}\\&=e-\{f(x)-(k-e)\} \text{（ ∵ ② ）}\\&=k-f(x)\end{aligned}$$

よって，$f'(x)+f(x)=k$

両辺 e^x をかけると，$e^x f'(x)+e^x f(x)=ke^x$

$$(e^x f(x))'=ke^x$$

$$e^x f(x)=ke^x+C \text{ （} C \text{ は定数）}$$

$$f(x)=Ce^{-x}+k$$

ここで，$f(0)=C+k$ であり，② から $C+k=k-e$ ，すなわち $C=-e$

ゆえに，$f(x)=-e^{1-x}+k$ …③

$k=\int_0^1 tf(t)\,dt$ より

$$\begin{aligned}k&=\int_0^1 t(-e^{1-t}+k)\,dt\\&=\int_0^1 kt\,dt-\int_0^1 te^{1-t}\,dt\\&=k\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1-\Big[-(t+1)e^{1-t}\Big]_0^1\\&=\frac{1}{2}k+\Big[(t+1)e^{1-t}\Big]_0^1\\&=\frac{1}{2}k+(2-e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int te^{1-t}\,dt&=\int t(-e^{1-t})'\,dt\\&=-te^{1-t}-\int -e^{1-t}\,dt\\&=-te^{1-t}+\int e^{1-t}\,dt\\&=-te^{1-t}-e^{1-t}+C'\\&=-(t+1)e^{1-t}+C'\end{aligned}$$

これより，$k=-2e+4$ を得る。

③ に代入して，$f(x)=-e^{1-x}-2e+4$ …答

【総括】

混合していますが，対応自体はそれぞれ変わりません。

$f'(x)+A(x)f(x)=B(x)$ 型の微分方程式は，両辺 $e^{\int A(x)\,dx}$ をかけて処理するとうまくいくのですが，ノーヒントでは経験がモノを言います。