a 個の白球と b 個の赤球が入っているつぼが n 個ある。
第1のつぼから1個の球を取り出して第2のつぼに入れる。
次に第2のつぼから1個の球を取り出して第3のつぼに入れる。
この操作を続けて最後に第 n のつぼから取り出された球が白球である確率を求めよ。ただし，つぼから各球は等しい確率で取り出されるものとする。

＜ ’70 九州大 ＞

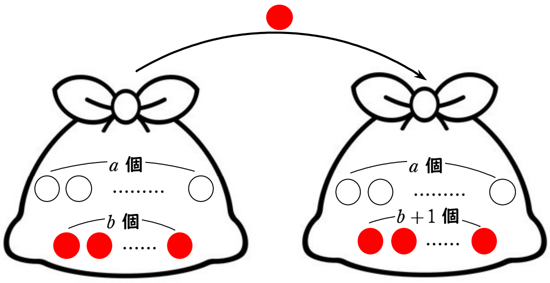
【戦略】

いきなり n 個目の壺にいくのはよく分かりませんから，ひとまず1個目の壺，2個目の壺，… というように実験をし，様子を掴むことにしましょう。

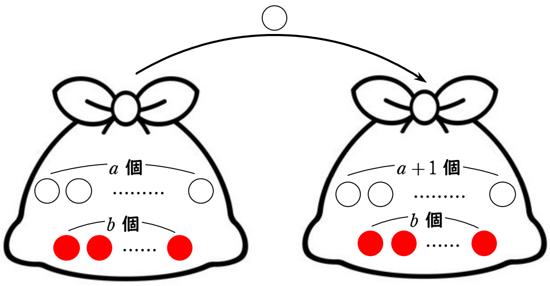
k 個目の壺から白を取る確率を p_k とします。$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

p_1 は明らかに $p_1=\dfrac{a}{a+b}$ **です。**

p_2 は



と，赤を取り出して第2の壺の白球が a 個のまま白を取り出す



と，白を取り出して第2の壺の白球が $a+1$ 個となり白を取り出す

のいずれかですから

$$p_2=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}$$
$$=\frac{a\{b+(a+1)\}}{(a+b)(a+b+1)}$$
$$=\frac{a}{a+b}$$

となります。

ここまでくると，

これもしかして $p_3,\ p_4,\ \cdots\cdots$ は全部 $\dfrac{a}{a+b}$ じゃないか？

と予想が立ちますので，帰納法で裏付けます。

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ で $p_k=\dfrac{a}{a+b}$ ということを示すとなると，帰納法の定義域の問題がウルサイので，いっそのこと一般論で全ての自然数 k について $p_k=\dfrac{a}{a+b}$ であることを示したいと思います。

【解答】

k 回目の操作において白球を取る確率を p_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とする。

$$p_1=\frac{a}{a+b}\ \cdots ①$$

p_2 とは，$\begin{cases}\text{第1のつぼから赤を取り出して第2のつぼから白を取る}\\ \text{第1のつぼから白を取り出して第2のつぼから白を取る}\end{cases}$

となる確率であり，

$$p_2=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}$$
$$=\frac{a\{b+(a+1)\}}{(a+b)(a+b+1)}$$
$$=\frac{a}{a+b}$$

これより，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して $p_k=\dfrac{a}{a+b}$ $\cdots(*)$ と予想できるため，これを数学的帰納法で証明する。

[1]：$k=1$ のとき

① より $(*)$ は正しい。

[2]：$k=m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき

$p_m=\dfrac{a}{a+b}$ であると仮定する。

p_{m+1} とは

$\begin{cases}\text{第 } m \text{ のつぼから赤を取り出して第 } m+1 \text{ のつぼから白を取る}\\ \text{第 } m \text{ のつぼから白を取り出して第 } m+1 \text{ のつぼから白を取る}\end{cases}$

という確率であり

$$p_{m+1}=(1-p_m)\cdot\frac{a}{a+b+1}+p_m\cdot\frac{a+1}{a+b+1}$$
$$=\left\{1-\frac{a}{a+b}\right\}\cdot\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}\quad(\because\ \text{仮定})$$
$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}$$
$$=\frac{a\{b+(a+1)\}}{(a+b)(a+b+1)}$$
$$=\frac{a}{a+b}$$

ゆえに，$k=m+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上 [1]，[2] から，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して $p_k=\dfrac{a}{a+b}$ が成立する。

ゆえに，求める確率 p_n は $p_n=\dfrac{a}{a+b}$ $\cdots$ 答

【戦略 2】

一定のアルゴリズムによる操作のくり返しということで，

漸化式の立式

に目を向けてもよいでしょう。

【解 2】

k 回目の操作において白球を取る確率を p_k $(k=1,2,\cdots\cdots)$ とする。

第 $k+1$ の壺から白球を取り出すのは

$$\begin{cases}\text{第 } k \text{ の壺から白球を取り出して 第 } k+1 \text{ の壺から白を取り出す} \\ \text{第 } k \text{ の壺から赤球を取り出して 第 } k+1 \text{ の壺から白を取り出す}\end{cases}$$

のいずれかであり，その確率 p_{k+1} は

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_k)\cdot\frac{a}{a+b+1} \\ &= \frac{1}{a+b+1}p_k+\frac{a}{a+b+1} \end{aligned}$$

これは

$$p_{k+1}-\frac{a}{a+b}=\frac{1}{a+b+1}\left(p_k-\frac{a}{a+b}\right)$$

と変形できるため

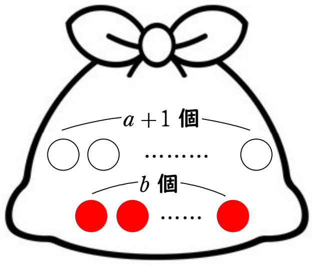
$$\begin{aligned} p_k-\frac{a}{a+b} &= \left(p_1-\frac{a}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+b+1}\right)^{n-1} \\ &= 0 \quad \left(\because\ p_1=\frac{a}{a+b}\right) \end{aligned}$$

ゆえに，全ての自然数 k に対して $p_k=\dfrac{a}{a+b}$

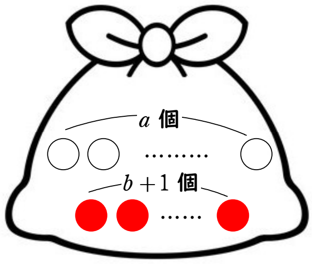
求める確率 p_n は，$p_n=\dfrac{a}{a+b}$ …答

【総括】

第 2 の壺以降は基本的に



の状態から取り出すか



の状態から取り出すか

です。

よくよく考えてみれば

段々白が出づらくなる，あるいは段々白が出やすくなる

というようなことがないということも納得いくでしょう。

似たような話題で「ポリアの壺」という話題もありますが，それよりは難易度的には落ち着いています。