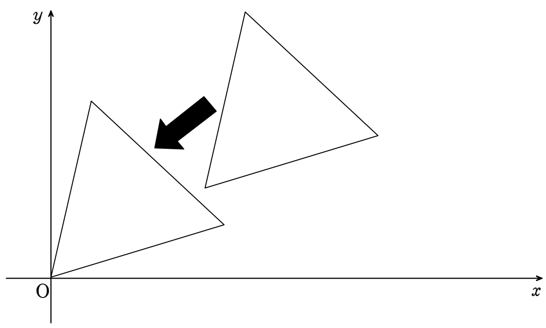
点 $(a\,,\,b)$ は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。

ただし，必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せずに用いてもよい。

＜ '99 大阪大 ＞

【戦略 1】

もちろん背理法の一手でしょう。



ここでは正三角形であることを，「回転」を用いて捌いていきます。

そこで，複素数平面と見なして考えます。

3 頂点が有理点であれば，頂点の 1 つを原点に重ねるように平行移動をしても，残り 2 頂点は有理点です。

これにより回転処理が分かりやすくなるでしょう。

$\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転であるため，処理が鬱陶しいですが，無理して複号同順で処理してミスりそうだなと思ったら，場合分けしても構わないでしょう。

回転処理をして得られる $\sqrt{3}=$有理数 という式が引き金となり矛盾に繋がっていきます。

【解 1】

正三角形の 3 頂点がすべて有理点と仮定する。

平行移動を施して頂点の 1 つを原点に重ねても他の 2 頂点は有理点であるので

$$\mathrm{A}\,(0\,,\,0),\ \mathrm{B}\,(a\,,\,b),\ \mathrm{C}\,(c\,,\,d)$$

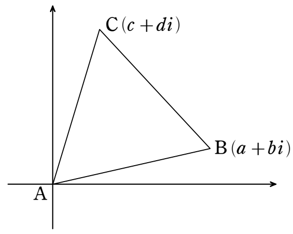
（$a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ は有理数で，$(a\,,\,b)\fallingdotseq(0\,,\,0)$，$(c\,,\,d)\fallingdotseq(0\,,\,0)$ ）

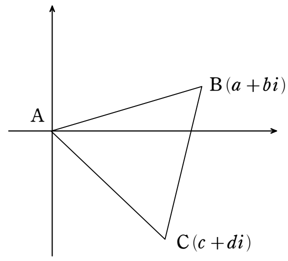
とおくことができる。

この座標平面を複素数平面とみなすと，

$$\mathrm{A}\,(0),\ \mathrm{B}\,(a+bi),\ \mathrm{C}\,(c+di)$$

となり，△ABC が正三角形であることから





$$\begin{aligned} c+di &= (a+bi)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ &= (a+bi)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(a\mp\sqrt{3}\,b)+(b\pm\sqrt{3}\,a)\,i\right\}\ \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

よって，$2c+2di=(a\mp\sqrt{3}\,b)+(b\pm\sqrt{3}\,a)\,i$

これより，$\begin{cases} 2c=a\mp\sqrt{3}\,b \\ 2d=b\pm\sqrt{3}\,a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c-a=\mp\sqrt{3}\,b & \cdots① \\ 2d-b=\pm\sqrt{3}\,a & \cdots② \end{cases}$

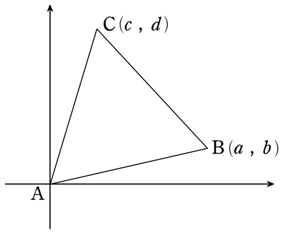
$b\fallingdotseq0$ と仮定すると，① より，$\sqrt{3}=\mp\dfrac{2c-a}{b}$ で，(無理数)＝(有理数) となり矛盾するため，$b=0$

$a\fallingdotseq0$ と仮定すると，② より，$\sqrt{3}=\pm\dfrac{2d-b}{a}$ で，(無理数)＝(有理数) となり矛盾するため，$a=0$

これは，$(a\,,\,b)\fallingdotseq(0\,,\,0)$ であることに矛盾する。

以上から，3 頂点がすべて有理点となる正三角形は存在しないことが示された。

【戦略 2】



という構図から，面積公式

$$\frac{1}{2}|ad-bc|$$

に注目する人もいるでしょう。

【解 2】

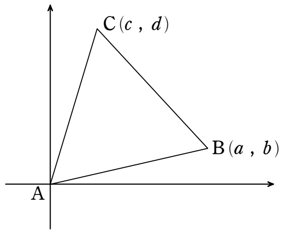
正三角形の 3 頂点がすべて有理点と仮定する。

平行移動を施して頂点の 1 つを原点に重ねても他の 2 頂点は有理点であるので

$$\mathrm{A}(0,\ 0),\ \mathrm{B}(a\ ,\ b),\ \mathrm{C}(c\ ,\ d)$$

（a，b，c，d は有理数で，$(a\ ,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$，$(c\ ,\ d)\fallingdotseq(0,\ 0)$ ）

とおくことができる。



$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$$

一方，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $(0,\ 0)$，$(a\ ,\ b)$，$(c\ ,\ d)$ という 3 点で作られる三角形の面積であるため

$$\frac{1}{2}|ad-bc|$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

すなわち，$\sqrt{3}(a^2+b^2)=2|ad-bc|$ を得る。

$a^2+b^2\fallingdotseq 0$ より，$\sqrt{3}=\dfrac{2|ad-bc|}{a^2+b^2}$

左辺は無理数だが，右辺は有理数であり，矛盾する。

以上から，3 頂点がすべて有理点となる正三角形は存在しないことが示された。

【戦略 3】

もちろん、例題で学んだような

傾きと tan の関係性を用いて座標平面上での角度を扱う

という基本事項を用いて処理することも可能です。

【解 3】

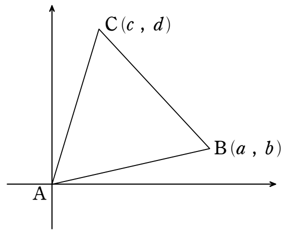
正三角形の 3 頂点がすべて有理点と仮定する。

平行移動を施して頂点の 1 つを原点に重ねても他の 2 頂点は有理点であるので

$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(a\ ,\ b)$，$\mathrm{C}(c\ ,\ d)$

（a，b，c，d は有理数で，$(a\ ,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$，$(c\ ,\ d)\fallingdotseq(0,\ 0)$ ）

とおくことができる。



$$\tan\alpha=(\text{直線 AB の傾き})=\frac{b}{a}$$
$$\tan\beta=(\text{直線 AC の傾き})=\frac{d}{c}$$

となるように角度 α，β を定め，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とすると

$\angle\mathrm{BAC}=\beta-\alpha$ であるため，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形のとき，$\dfrac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}=\sqrt{3}$

となり，左辺は有理数，右辺は無理数であり，矛盾する。

以上から，3 頂点がすべて有理点となる正三角形は存在しないことが示された。

【総括】

古くからある古典的な有名事実です。

複素数平面を用いた回転処理により正三角形であることを捌いていく路線の解答がオーソドックスで，そちらで捌いたという人が多いと思います。

面積に注目する【解 2】の路線も勉強していれば割と有名な解法ですが，初見で思いついてもおかしくはないシンプルな路線です。