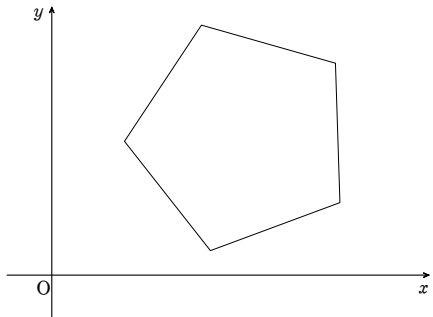


格子点同士を結ぶ2線分のなす角度【追加】

点 (a, b) は、 a と b がともに整数のときに格子点と呼ばれる。5つの頂点がすべて格子点である正五角形は存在しないことを示せ。

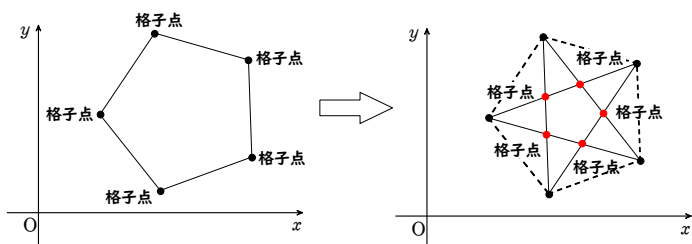
【戦略】

もちろん背理法の手ですが、



扱う角度的に、 108° などの「 36° 絡みの角度」で、それ単品でも結構面倒ですし、ましてや回転処理などの路線は明らかに茨の道です。

正直見えるかどうかという観察力と洞察力にかかってきますが

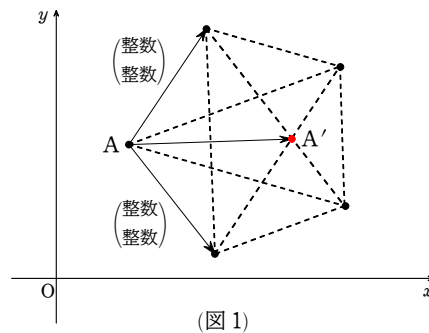


という正五角形の内部の正五角形の5頂点も格子点となります。

これをくり返すと、5頂点が格子点である正五角形のサイズをどんどん小さくしていくことができしまい、矛盾します。

【解答】

正五角形の5頂点がすべて格子点と仮定する。



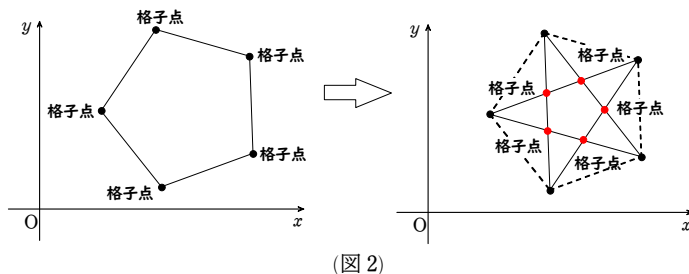
始点と終点が格子点であるベクトルは、 $\begin{pmatrix} \text{整数} \\ \text{整数} \end{pmatrix}$ という形で成分表示される。これを以後、整成分ベクトルと呼ぶ

(図1)において、 A は格子点であるため、 \overrightarrow{OA} は整成分ベクトルである。

$\overrightarrow{AA'}$ は2つの整成分ベクトルの和として表されるため、整成分ベクトルである。

ゆえに、 $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}$ であり、 $\overrightarrow{OA'}$ も整成分ベクトルとなるため A' は格子点となる。

以後同様に考えると



5頂点全てが格子点であると仮定すると、(図2)のように対角線によってできる五芒星を用いた正五角形の5頂点もまた全て格子点となる。

これをくり返せば、やがて

5頂点全て格子点 かつ 1辺の長さが1未満

となるような正五角形ができることになるが、格子点同士の距離は最低でも1はあるため、矛盾する。

【総括】

数式的に矛盾させるのはシンドイものがあるでしょう。

この矛盾のさせ方は「明日誰かに話したくなる」気持ちよさがあると思います。