関数 $f(x)$ は $x>0$ で定義された増加関数で，

$$f(3)=2\,,\ f(xy)=f(x)+f(y)$$

を満たしている。ただし，増加関数とは，関数 $f(x)$ が定義域内で $a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ を満たすものである。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=4$ を満たす x の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x+1)+f(x-3)\leqq 4$ を解け。

＜ '00 早稲田大 ＞

【戦略】

(1) **$f(xy)=f(x)+f(y)$ に何か値を代入していき，$f(☆)=4$ となる ☆ を発見できれば勝ちです。**

$f(3)=2$ という手がかりを活かすことを考えれば

「4 という数字に意味あり」と睨み，$4=f(3)+f(3)$ と見ます。

これにより，$f(9)=4$ を得ることになります。

注意したいのは，$f(x)=4$ を満たす x はなんだ？という問いかけに対して，$x=9$ が見つかったわけです。

$x=9$ 以外に解はないのか？という突っ込みに耐えられるように $0<x<9$ のとき，$x>9$ のときは $f(x)\fallingdotseq 4$ ですよということについて言及しておきます。

(2) **そもそもの f の定義域から $\begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$，すなわち $x>3$ の範囲で考えることになります。**

左辺の $f(x+1)+f(x-3)$ という和の形を

$$f(\,(x+1)(x-3)\,)$$

と見て，さらに，右辺の 4 も (1) がヒントであると考えれば，与えられた不等式は

$$f(\,(x+1)(x-3)\,)\leqq f(9)$$

と見れるでしょう。

f が増加関数であることから，中身の大小がそのままリンクされるため

$$(x+1)(x-3)\leqq 9$$

を処理することになります。

【解答】

(1) $f(xy)=f(x)+f(y)$ …(*)

(*) において，$x=3$，$y=3$ を代入すると，

$$f(3\cdot 3)=f(3)+f(3)$$

条件 $f(3)=2$ より

$$f(9)=4$$

$x>0$ で定義される増加関数ゆえ

$x=9$ 以外に解がないことを言及します。

$0<x<9$ のとき，$f(x)<4$
$x>9$ のとき，$f(x)>4$

以上から，$f(x)=4$ を満たす x の値は $x=9$ …答

(2) 与えられた不等式を考えるにあたり，$\begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$，すなわち

$$x>3 \ \cdots ①$$

で考える必要がある。

このとき，(*) より，$f(\,(x+1)(x-3)\,)=f(x+1)+f(x-3)$

また，(1) より，$f(9)=4$

ゆえに，与えられた不等式は

$$f(\,(x+1)(x-3)\,)\leqq f(9)$$

$f(x)$ は $x>0$ で定義される増加関数ゆえ

$$0<(x+1)(x-3)\leqq 9$$

① より，左側の不等号は成立する。

$(x+1)(x-3)\leqq 9$ について整理すると，$x^2-2x-12\leqq 0$

これを解くと，$1-\sqrt{13}\leqq x\leqq 1+\sqrt{13}$ …②

①，② をともに満たす x の範囲を考えて

$$3<x\leqq 1+\sqrt{13} \ \cdots 答$$

【総括】

モデルケースとして

$$f(x)=\log_a x \quad \left(\begin{cases} a \text{ は } 1 \text{ 以外の正の定数} \\ x>0 \end{cases} \right)$$

が見つかるため，$f(3)=2$ という条件は $\log_a 3=2$ で，$a^2=3$

$a>0$ より $a=\sqrt{3}$

つまり，$f(x)=\log_{\sqrt{3}} x=2\log_3 x$ というモデルケースを考えることで

(1)　$2\log_3 x=4$ を解いて，$x=9$

(2)　$2\log_3(x+1)+2\log_3(x-3)\leqq 4$

真数条件から $\begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$，すなわち $x>3$

$\log_3(x+1)+\log_3(x-3)\leqq 2$

$\log_3(x+1)(x-3)\leqq \log_3 9$

$(x+1)(x-3)\leqq 9$

$x^2-2x-12\leqq 0$

$1-\sqrt{13}\leqq x\leqq 1+\sqrt{13}$

$x>3$ を考えて，$3<x\leqq 1+\sqrt{13}$

という結論の予測は立ちますが，これを解答で触れることはやぶ蛇どころの話ではありません。

あくまで，$\begin{cases} f(3)=2 \\ f(xy)=f(x)+f(y) \end{cases}$ を満たす $x>0$ で定義された増加関数 f という与えられた条件を用いて論述する必要があり，

勝手に $f(x)=\log_a x$ と決め打ちしてはならないわけです。

log 以外にあるかもしれないじゃないかという突っ込みに耐えられませんから。

なお，原題は増加関数について説明書きはありませんでした。

ただ，増加関数には

$a\leqq b$ ならば $f(a)\leqq f(b)$ という広義単調増加

$a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ という狭義単調増加

という捉え方があり，今回問題文で言われている増加関数は狭義単調増加であると捉えました。

広義単調増加だと $0<x<9$ で $f(x)<f(9)$ ということなどが言えないため問題が解けなくなってしまいます。