$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}$$

$$g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1)　任意の実数 x に対し，$f(x)>0$ である。

(2)　方程式 $g(x)=0$ はただ一つの実数解 α をもち，$-1<\alpha<0$ である。

＜ '94 東京大 ＞

【戦略 1】

愚直に微分の力を借りて証明する路線で押し切ることを考えます。

符号の判断ができるまで微分し続けることになります。

キレイに因数分解できるわけではなく，極値を与える x の値はキレイに出てこないですが，文字で置きながら先へ進んでいきましょう。

その際の極値計算においては，高次計算においての工夫の一つ

除法の原理の利用

を考えます。

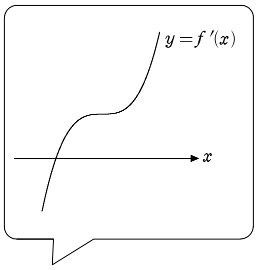
$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$f(x)=f'(x)\,Q(x)+R(x)$$

となります。

これにより，$f'(\beta)=0$ となる β に対しては，$f(\beta)=R(\beta)$ と，次数を下げて計算できます。

【解 1】



(1)　$f'(x)=4x^3+3x^2+x+\frac{1}{6}$

$$f''(x)=12x^2+6x+1$$
$$=12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$$
$$>0$$

これより，$f'(x)$ は単調増加で $f'(x)$ は全ての実数値をとり得る。

ゆえに，$f'(\beta)=0$ となる β がただ一つ存在することになり

x	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

という増減表を得る。

余白で頑張って割り算をしてください。

$$f(\beta)=\beta^4+\beta^3+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{24}$$

$$=\left(4\beta^3+3\beta^2+\beta+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}\beta^2+\frac{1}{16}\beta+\frac{1}{32}$$

$$=\frac{1}{16}\beta^2+\frac{1}{16}\beta+\frac{1}{32}\quad(\because\ f'(\beta)=0)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{64}$$

$$>0$$

以上から，$f(x)\geqq f(\beta)>0$ ということが言え，題意は示された。

(2)　$g'(x)=5x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}$

$$g''(x)=20x^3+12x^2+3x+\frac{1}{3}$$

$$g'''(x)=60x^2+24x+3$$
$$=60\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}$$
$$>0$$

これより，$g''(x)$ は単調増加で，$g''(x)$ は全ての実数値をとり得る。

ゆえに，$g''(\gamma)=0$ となる γ がただ一つ存在することになり

x	$\cdots$	γ	$\cdots$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↘		↗

という増減表を得る。

$$g'(\gamma)=5\gamma^4+4\gamma^3+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{1}{3}\gamma+\frac{1}{24}$$

$$=\left(20\gamma^3+12\gamma^2+3\gamma+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{20}\right)+\frac{3}{20}\gamma^2+\frac{1}{10}\gamma+\frac{1}{40}$$

$$=\frac{3}{20}\gamma^2+\frac{1}{10}\gamma+\frac{1}{40}\quad(\because\ g''(\gamma)=0)$$

$$=\frac{3}{20}\left(\gamma+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{120}$$

$$>0$$

したがって，$g'(x) \geqq g'(\gamma) > 0$ が言え，$g(x)$ は単調増加である。

$$g(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = -\frac{11}{30} < 0$$
$$g(0) = \frac{1}{120} > 0$$

ゆえに，$g(\alpha) = 0$ を満たす α が $-1 < \alpha < 0$ の範囲にただ一つ存在する。

【戦略 2】

微分に頼らずに平方完成してしまうのも手ですが，これについては観察力という名のセンスが要求される路線です。

【解 2】

(1) $$f(x) = x^2(x^2 + x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}$$
$$= x^2\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}$$
$$= x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}$$
$$= x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right)$$
$$= x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left\{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18}\right\}$$
$$= x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{72}$$
$$> 0$$

であり，題意は示された。

(2) $$g'(x) = 5x^4 + 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left(x^2 + \frac{4}{5}x\right) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left\{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right\} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10}\left(x^2 + \frac{10}{21}x\right) + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10}\left\{\left(x + \frac{5}{21}\right)^2 - \frac{25}{441}\right\} + \frac{1}{24}$$
$$= 5x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10}\left(x + \frac{5}{21}\right)^2 + \frac{1}{504}$$
$$> 0$$

したがって，$g(x)$ は単調増加である。

$$g(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = -\frac{11}{30} < 0$$
$$g(0) = \frac{1}{120} > 0$$

ゆえに，$g(\alpha) = 0$ を満たす α が $-1 < \alpha < 0$ の範囲にただ一つ存在する。

【戦略 3】

完全に玄人の路線ですが，今回 $f(x)$，$g(x)$ に登場する係数

$$\frac{1}{0!},\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!},\ \frac{1}{5!}$$

を活かし，e^x のテイラー展開

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots$$

を想起することを目論みます。

これにより，(2) の $g(x)$ が $f(x)$ と結びつき，労力が激減します。

【解 3】

(1) $x \geqq 0$ では $f(x)>0$ となるのは自明であるため，以下 $x<0$ で考える。

このとき，$x=\dfrac{1}{X}$ $(X<0)$ とおくことで

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}\\&=\frac{1}{X^4}+\frac{1}{X^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{X^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{X}+\frac{1}{24}\\&=\frac{1}{X^4}\left(1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{24}X^4\right)\end{aligned}$$

$F(X)=1+X+\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{6}X^3+\dfrac{1}{24}X^4$ $(X<0)$ とおき，$F(X)>0$ を示せばよい。

$$F'(X)=1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3$$

$$\begin{aligned}F''(X)&=1+X+\frac{1}{2}X^2\\&=\frac{1}{2}(X+1)^2+\frac{1}{2}\\&>0\end{aligned}$$

ゆえに，$F'(X)$ は $X<0$ の範囲で単調増加で，$F'(0)=1$

よって，$F'(p)=0$ となる p が $p<0$ の範囲にただ一つ存在することになり

X	$\cdots$	p	$\cdots$	(0)
$F'(X)$	$-$	0	$+$	1
$F(X)$	↘		↗	1

という増減表を得る。

$$\begin{aligned}F(p)&=F'(p)+\frac{1}{24}p^4\\&=\frac{1}{24}p^4\\&>0\end{aligned}$$

これより，$F(X) \geqq F(p)>0$ ということが言え，題意は示された。

(2) $x \geqq 0$ の範囲では，$g(x) \geqq \dfrac{1}{120}>0$ であるため，方程式 $g(x)=0$ は実数解をもち得ない。

したがって，以下 $x<0$ の範囲で，$g(x)=0$ の解を考えることにする。

$x<0$ のとき，(1) 同様 $x=\dfrac{1}{X}$ $(X<0)$ とおくことで

$$\begin{aligned}g(x)&=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}\\&=\frac{1}{X^5}\left(1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{24}X^4+\frac{1}{120}X^5\right)\end{aligned}$$

と表せ，$G(X)=1+X+\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{6}X^3+\dfrac{1}{24}X^4+\dfrac{1}{120}X^5$

とおいたとき，

方程式 $G(X)=0$ の解が $X<-1$ の範囲にただ一つ存在する

ということを示せばよい。

$$\begin{aligned}G'(X)&=1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{24}X^4\\&=F(X)\\&>0 \ (\because (1))\end{aligned}$$

これより，$G(X)$ は単調増加である。

また，

$$\begin{aligned}G(-1)&=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\\&=\frac{11}{30}\\&>0\end{aligned}$$

十分小さな X に対して $G(X)<0$ となるため，

以上から，$G(X)=0$ の解が $X<-1$ の範囲にただ一つ存在することが言え，題意は示された。

【総括】

これらの係数は作為的なもので，出題者の頭には【解 3】の路線が想定されていたものと考えられます。

ただし，ストレートな設定ではなく，ワンクッション噛ませているため単純な運用ではなくなっています。

係数的に e^x のテイラー展開をインスピレーションしてもその活用法がよく見えずに，腕力で押し切るか工夫を模索し続けるかでウロチョロするという結果にもなりかねません。

もちろん，テイラー展開を知らなくても入試的には問題ありません。

このように背景はあるかもしれませんが，試験場では割り切って計算を進める方が得策であることも東大では多いです。