以下の問いに答えよ。

(1) a と b を互いに素な自然数とし，自然数 n に対し

$$\frac{1}{n+1}<\frac{b}{a}<\frac{1}{n}$$

が成り立つとする。互いに素な自然数 c，d により

$$\frac{b}{a}-\frac{1}{n+1}=\frac{d}{c}$$

と表すとき，$d<b$ となることを示せ。

(2) S を 0 より大きく 1 より小さい有理数とする。このとき，S は異なる自然数 n_1，n_2，…，n_ℓ の逆数の和として

$$S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n_\ell}\quad(1<n_1<n_2<\cdots\cdots<n_\ell)$$

と表すことができることを示せ。

＜ '21 広島大 ＞

【戦略】

(1) **$\dfrac{b}{a}$ を隣接する単位分数で挟み，最も近い単位分数との誤差を考えたときに，**

誤差となる有理数の分子は減少するぞ

ということを示せという趣旨です。

$\dfrac{d}{c}$ という誤差は，$\dfrac{d}{c}=\dfrac{bn+b-a}{a(n+1)}$ と通分すると

$\dfrac{d}{c}$ は既約分数ですが，$\dfrac{bn+b-a}{a(n+1)}$ は既約分数とは限らないので，

右辺が約分されて $\dfrac{d}{c}$ と等しくなった可能性を考えると

$$d\leqq bn+b-a$$

となります。

ここから，目標の $d<b$ が言えるためには $bn-a<0$ である根拠を探せばよく，それは元々の $\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{n}$ ということから言えそうです。

(2) **ひとまず実験をします。**

例えば，$\dfrac{3}{7}$（$=0.4285\cdots$）を単位分数の和で表したければ，

最も近い単位分数 $\dfrac{1}{3}$（$=0.33\cdots$）に注目し，その誤差を考えて

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{2}{21}$$

となります。

このとき，分子が減少することを保証する役割が (1) です。

ということは，$\dfrac{2}{21}$ に最も近い単位分数を考えて，その誤差をとるという作業をすれば，分子の 2 は減って 1 とすることができることになります。

実際，$\dfrac{2}{21}$（$=0.0952\cdots$）に最も近い単位分数 $\dfrac{1}{11}$（$=0.0909\cdots$）を考えると

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$

となり，$\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{231}$ と単位分数で分割できました。

【解答】

(1) $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{n}$ …①

$\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{n+1}$ という c，d の定め方から

$$\frac{d}{c}=\frac{b(n+1)-a}{a(n+1)}=\frac{bn+b-a}{a(n+1)}$$

左辺は既約分数，右辺は既約分数とは限らないことから，右辺が約分されて $\dfrac{d}{c}$ となった可能性を考えると

$$d\leqq bn+b-a\quad\cdots②$$

一方，① の右側の不等式から，$bn<a$，すなわち $bn-a<0$ …③

②，③ から，$d\leqq b+(bn-a)<b$ となり，$d<b$ が示された。

(2) $0<S<1$ を満たす有理数 S を

$S=\dfrac{b}{a}$（$1\leqq b<a$ であり，a，b は互いに素な自然数）

と表すことにする。

$b=1$ のときは $S=\dfrac{1}{a}$ となり，題意成立。

$b\geqq 2$ のとき，

$0<\dfrac{b}{a}<1$ であることから，$\dfrac{b}{a}$ の逆数 $\dfrac{a}{b}$ は 1 より大きく

$$N<\frac{a}{b}<N+1$$

となる自然数 N をとることができ，

$$\frac{1}{N+1}<\frac{b}{a}<\frac{1}{N}$$

と隣接単位分数で挟むことができる。

このとき，$\dfrac{b}{a}$ に最も近い単位分数 $\dfrac{1}{N+1}\left(=\dfrac{1}{n_1}\text{とおく}\right)$

との誤差を考えると

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{n_1}+\frac{d_1}{c_1}\quad\left(0<\frac{d_1}{c_1}<1\right)$$

と表すことができ，(1) から $b>d_1$

次に，$\dfrac{d_1}{c_1}$ についても $\boxed{\quad}$ の考え方から

$$\frac{1}{n_2}<\frac{d_1}{c_1}<\frac{1}{n_2-1}$$

という隣接単位分数で挟むことができる。

このとき，$\dfrac{d_1}{c_1}$ に最も近い単位分数 $\dfrac{1}{n_2}$ との誤差を考えると

$$\frac{d_1}{c_1}=\frac{1}{n_2}+\frac{d_2}{c_2}\quad\left(0<\frac{d_2}{c_2}<1\right)$$

と表すことができ，(1) から，$d_1>d_2$

このように，以後同様に

$$\frac{1}{n_{k+1}}<\frac{d_k}{c_k}<\frac{1}{n_{k+1}-1}$$

と隣接単位分数で挟み，$\frac{d_k}{c_k}$ に最も近い単位分数 $\frac{1}{n_{k+1}}$ との誤差を $\frac{d_{k+1}}{c_{k+1}}$ と定めると

$$\frac{d_k}{c_k}=\frac{1}{n_{k+1}}+\frac{d_{k+1}}{c_{k+1}}$$

と表すことができ，(1) から $d_k>d_{k+1}$ が成り立つ。

この数列 $\{d_n\}$ は自然数の項からなる単調減少数列であり，

$$d_1>d_2>d_3>\cdots\cdots>d_\ell=1$$

となる，d_ℓ が存在する。

以上から，$\frac{b}{a}$ という有理数に対して

Ⅰ：隣接単位分数で挟む
Ⅱ：最も近い単位分数との誤差を考える
Ⅲ：その誤差の有理数に対して，分子が 1 となるまで手順Ⅰ，Ⅱ を繰り返す。

というアルゴリズムを繰り返すことにより

$$S=\frac{b}{a}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n_\ell}$$

と表すことができる。

【総括】

今回の (2) の手法で単位分数化するアルゴリズムは

「フィボナッチ・シルベスターのアルゴリズム」

と呼ばれます。

なお，1 より大きな有理数に対してもエジプト分数分解できることは保証されます。

例えば，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq 1$ となる正の整数 a，b，c $(a<b<c)$ を考えると詳しい計算結果は省略しますが

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)$$

となります。

ただ，$a\geqq 3$ であれば，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<1$ となるため

ほとんどの a，b，c は 1 以上にならないです。

また，エジプト分数分解は一意性はありません。

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

というように，単位分数が 2 つの単位分数の和に分割されるためです。

例えば，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ という有名なエジプト分数表示も

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

なので，

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

とも表せてしまいます。