

## 単位分数の和【エジプト式分数】

次の問に答えよ。

- (1)  $a, b$  を  $a < b$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$  を満たす任意の自然数とすると、  
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  の最大値が  $\frac{5}{6}$  であることを証明せよ。
- (2)  $a, b, c$  を  $a < b < c$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$  を満たす任意の自然数と  
 するとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  の最大値が  $\frac{41}{42}$  であることを証明せよ。
- < '06 富山大 >

### 【戦略】

- (1)  $a=1$  だと、 $\frac{1}{a}$  単品で 1 となり、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$  を満たしません。

このことから、 $2 \leq a < b$  ということになり、 $\begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 3 \end{cases}$  となります。

もちろん、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  を大きくしたいと思えば、分母が小さくするのが  
 最善ですから、 $a=2, b=3$ 、すなわち  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left( = \frac{5}{6} \right)$  が最大値です。

- (2) 一つずつ追いかけます。

(1) 同様、 $a \geq 2$  であることが分かります。

最善を尽くすのであれば、 $a=2$  とするのがよいでしょう。  
 幸いにも今回は証明形式であるため、【解答】では  $a \geq 3$  のとき  
 頑張っても  $\frac{41}{42}$  に届かないことを先に示してしまいます。

$a=2$  のとき、次に  $b$  の最善を尽くそうと思うと、 $2 < b < c$  ですから  
 $b=3$  とするのが最善っぽいですね。

このとき、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < 1$  より、 $c > 6$  を得ますから、 $c$  については  
 $c=7$  が最善です。

$b \geq 4$  のときは  $a=2, b=4, c=5$  と最善を尽くしても

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}$$

と、 $\frac{41}{42}$  に届きません。

### 【解答】

- (1)  $a=1$  だと、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$  になってしまうので、 $a \geq 2$  である。

さらに、 $a > b$  より  $b \geq 3$

よって、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$  (等号成立は  $a=2, b=3$  のとき)

これより、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  の最大値は  $\frac{5}{6}$  である。

- (2)  $a=1$  だと、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$  になってしまうので、 $a \geq 2$  である。

(i)  $a \geq 3$  のとき

$a < b < c$  より、 $b \geq 4, c \geq 5$  である。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \frac{41}{42}$$

- (ii)  $a=2$  のとき

$a < b < c$  より、 $2 < b < c$  であり、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$  より、

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$$

である。

(ア)  $b=3$  のとき

$3 < c$  かつ  $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$  であるから、 $\frac{1}{c} < \frac{1}{6}$  となり、 $c \geq 7$

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42} \end{aligned}$$

(等号成立は  $a=2, b=3, c=7$  のとき)

(イ)  $b \geq 4$  のとき

$b < c$  より  $c \geq 5$  であるから、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}$$

以上より、 $a=2, b=3, c=7$  のとき  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  は最大値  $\frac{41}{42}$  となる。

【総括】

$\frac{1}{\text{自然数}}$  という形の分数を単位分数と言います。

( 自然数  $n$  の逆数 ( $\frac{1}{n}$ ) と言うとシンプルでしょうか )

また,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  のように, 異なる単位分数の和の形で表現する方法を

エジプト式分数と言います。

$$\frac{5}{6} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

というように見る式変形を項数 2 のエジプト式分数分解と呼ぶことにする

と, 本問は 1 未満の正の有理数を

項数 2 のエジプト式分数分解, 項数 3 のエジプト式分数分解

したときの最大値を考える問題です。

なお, 例えば, 項数 4 のエジプト式分数分解も本問の結果を考えると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{d} < 1 \text{ より, } \frac{1}{d} < 1 - \frac{41}{42} \left( = \frac{1}{42} \right) \text{ で, } d > 42$$

ということで,  $d = 43$  が最善策だと分かります。

つまり,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{1805}{1806}$  が項数 4 でエジプト式分数分解した場

合の最大値ということになります。

項数  $n$  でエジプト式分数分解した場合の最大値も同様の手法で得ることが

でき, 「カーティスの定理」と呼ばれています。

なお, 項数に拘らなければ,

任意の有理数はエジプト式分数分解可能である

ということも言えます。(【関連参考問題】参照)