n を正の整数とするとき，3^n を 8 で割った商を q_n とする。このとき

$$\sum_{k=1}^{n} q_k$$

を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

3^n を 8 で割った余りであれば周期性をもつので，ひとまずは 3^n を 8 で割った余りを r_n と設定し，r_n を求めます。

3^1 を 8 で割った余りは 3
3^2 を 8 で割った余りは 1
3^3 を 8 で割った余りは 3
3^4 を 8 で割った余りは 1

という実験から，$r_n=\begin{cases}3\ (n \text{ が奇数のとき})\\ 1\ (n \text{ が偶数のとき})\end{cases}$ という予想が立ちます。

周期が 2 であることの証明として

$$r_{n+2}=r_n$$

であることを示すのが常套手段の一つです。

これを示すには，

3^{n+2} を 8 で割った余りと 3^n を 8 で割った余りが等しい

ことが言えればよいことになります。

そしてそれは

$$\begin{aligned}3^{n+2}-3^n&=3^2\cdot 3^n-3^n\\&=8\cdot 3^n\\&\equiv 0 \pmod 8\end{aligned}$$

より，$3^{n+2}\equiv 3^n \pmod 8$ と言えるため，解決です。

このあとは $3^n=8q_n+r_n$ という関係式から，$q_n=\dfrac{3^n-r_n}{8}$ が言え，r_n は求まっていますから，あとは基本的な $\sum$ 計算となります。

n の偶奇により，q_n を与える式が異なることに注意しながら場合分けをして処理すればよいでしょう。

【解答】

$$\begin{aligned}3^{n+2}-3^n&=8\cdot 3^n\\&\equiv 0 \pmod 8\end{aligned}$$

ゆえに，$3^{n+2}\equiv 3^n \pmod 8$

これより，3^n を 8 で割ったときの余りを r_n とすると，$r_{n+2}=r_n$

$r_1=3$，$r_2=1$ であることから，$r_n=\begin{cases}3\ (n \text{ が奇数のとき})\\ 1\ (n \text{ が偶数のとき})\end{cases}$

$3^n=8q_n+r_n$ より，

$$\begin{aligned}q_n&=\frac{1}{8}(3^n-r_n)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(3^n-3)\ (n \text{ が奇数のとき})\\[2mm] \dfrac{1}{8}(3^n-1)\ (n \text{ が偶数のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

m を正の整数として，$\begin{cases}q_{2m-1}=\dfrac{1}{8}(3^{2m-1}-3)\\[2mm] q_{2m}=\dfrac{1}{8}(3^{2m}-1)\end{cases}$ であるため，

$$\begin{aligned}q_{2m-1}+q_{2m}&=\frac{1}{8}\cdot 3^{2m-1}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot 3^{2m}-\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{8}\cdot 3^{2m-1}\{1+3\}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\{3^{2m-1}-1\}\end{aligned}$$

[1]　n が偶数のとき，$n=2N$ $(N=1, 2, \cdots)$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2N} q_k&=\sum_{m=1}^{N}(q_{2m-1}+q_{2m})\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}(3^{2m-1}-1)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(9^N-1)}{9-1}-N\right\}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 9^N-3-8N}{8}\\&=\frac{3^{2N+1}-8N-3}{16}\\&=\frac{3^{n+1}-4n-3}{16}\end{aligned}$$

[2]　n が奇数のとき $n=2N-1$ $(N=1, 2, \cdots)$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2N-1} q_k&=\sum_{k=1}^{2N} q_k-q_{2N}\\&=\frac{3^{2N+1}-8N-3}{16}-\frac{3^{2N}-1}{8}\\&=\frac{3\cdot 3^{2N}-8N-3-2\cdot 3^{2N}+2}{16}\\&=\frac{3^{2N}-8N-1}{16}\\&=\frac{3^{n+1}-4n-5}{16}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q_k=\begin{cases}\dfrac{3^{n+1}-4n-5}{16}\ (n \text{ が奇数のとき})\\[2mm] \dfrac{3^{n+1}-4n-3}{16}\ (n \text{ が偶数のとき})\end{cases}$$ …答

【総括】

累乗数を何かで割った余りが周期性をもつということは難関大受験生であれば当然と思えてほしい内容です。

余りが求まれば，商も立式できます。

今回は余りを意図的に隠してありますから，構想も含めて考えると解答量以上の時間がかかるかもしれません。

なお，最後の結論を

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = \begin{cases} \dfrac{3^{n+1}-4n-4-1}{16} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{3^{n+1}-4n-4+1}{16} & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$= \frac{3^{n+1}-4n+(-1)^n-4}{16}$$

と一つの式でまとめることもできます。