α, β, γ を鋭角三角形の 3 つの内角とする。

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$

の最小値を求めよ。

＜ '66 金沢大 改 ＞

【戦略 1】

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ という従属 3 変数に関する最小を考えます。

$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ と

1 文字消去

を考えるのが素直でしょうか。

$$\begin{aligned}\tan\gamma&=\tan(\pi-(\alpha+\beta))\\&=-\tan(\alpha+\beta)\\&=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

ですから，これを引っ提げて，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ を計算してみます。

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\color{red}{\tan\alpha+\tan\beta}-\frac{\color{red}{\tan\alpha+\tan\beta}}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

で，$\tan\alpha+\tan\beta$ で括れることに気がつくと

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

というキレイな関係を得ることができます。

これさえ手に入ればコチラのもので，和と積に関する絶対不等式のエースである

相加平均・相乗平均の関係

によって仕留める算段が付きます。

登場人物は全て正の実数なので，特にうるさいことにもなりません。

【解 1】

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より，$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ より，

$$\begin{aligned}\tan\gamma&=\tan(\pi-(\alpha+\beta))\\&=-\tan(\alpha+\beta)\\&=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma&=\tan\alpha+\tan\beta-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=(\tan\alpha+\tan\beta)\left\{1-\frac{1}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right\}\\&=(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\frac{(1-\tan\alpha\tan\beta)-1}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=-\frac{\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}(\tan\alpha+\tan\beta)\\&=\tan\alpha\tan\beta\cdot\left\{-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right\}\\&=\tan\alpha\tan\beta\{-\tan(\alpha+\beta)\}\\&=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ は正の実数より，相加平均・相乗平均の関係から

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqq3\sqrt[3]{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$$

これより

$$\begin{aligned}(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^3&\geqq27(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)\\&=27(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)\ (\because\ (*))\end{aligned}$$

$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma>0$ であるため

$$(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^2\geqq27$$

すなわち，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqq3\sqrt{3}$

等号成立は $\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma$ のとき

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ の範囲では

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$$

すなわち正三角形のときに等号が成立する。

以上から，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ の最小値は $3\sqrt{3}$ …圏

【戦略 2】

1 文字消去後，α，β に関しては独立 2 変数となるため，

予選決勝法

により処理することも可能です。

【解 2】

$$\begin{cases} 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2} \\ 0<\gamma<\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha+\beta+\gamma=\pi \end{cases}$$ を　$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ として γ を消去すると

$$\begin{cases} 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(☆) \\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi \end{cases}$$

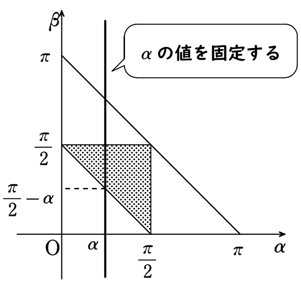
このとき，

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma&=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\{\pi-(\alpha+\beta)\}\\&=\tan\alpha+\tan\beta-\tan(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

これを β の関数と見て $f(\beta)$ とする。

$$\begin{aligned}f'(\beta)&=\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{1}{\cos^2(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\{\cos(\alpha+\beta)+\cos\beta\}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos\beta\}}{\cos^2\beta\cos^2(\alpha+\beta)}\\&=\frac{2\cos\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta\cos^2(\alpha+\beta)}\\&=-\frac{\sin(\alpha+2\beta)\sin\alpha}{\cos^2\beta\cos^2(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

(☆) を満たす $(\alpha,\ \beta)$ を図示すると



α を固定すると，β のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$$

この範囲で

$\alpha+2\beta=\pi$ **が実現可能**

β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi-\alpha}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\beta)$		$-$	0	$+$	
$f(\beta)$		↘		↗	

ゆえに，

$$\begin{aligned}f(\beta)&\geqq f\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\\&=\tan\alpha+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\tan\alpha+\frac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}-\left(-\frac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}\right)\\&=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$u=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<u<1$

このとき，

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}&=\frac{2u}{1-u^2}+\frac{2}{u}\\&=\frac{2}{u(1-u^2)}\end{aligned}$$

$g(u)=u(1-u^2)\ (=u-u^3)\ \ (0<u<1)$ とすると，$g'(u)=1-3u^2$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(u)$		$+$	0	$-$	
$g(u)$		↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	

ゆえに，$f\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)=\dfrac{2}{g(u)}\geqq3\sqrt{3}\ \ \cdots②$

①，② より

$$f(\beta)\geqq f\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\geqq3\sqrt{3}$$

等号成立は，$\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ かつ，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

すなわち，$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

以上から，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ の最小値は $3\sqrt{3}$ …答

【総括】

【解 1】の (*) は割と有名事実です。

原題ではこの関係式の証明が (1) でありましたが，(2) がつまらなくなってしまうことと，カットしても，難関大受験生は $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ を 1 文字消去して計算して

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

に辿り着くのは無理がないということ，さらには腕力による予選決勝法でも処理可能ということで，心を鬼にしてカットしました。

なお，【解 1】は

一度消去した γ を復活させる

ということに一貫性のなさを感じるかもしれません。

ただ，本問には明らかに対称性があります。

α，β，γ は対等なはずなのに，γ を亡き者にし，生き残った α，β に対して α を固定し β を動かすという態度は明らかに対称性 (対等性) に逆らった態度です。

対称性に逆らうと基本的には大変な思いをすることが多いということは【解 2】を見ればお分かりいただけると思います。