三角形と長方形の面積に関する論証【類題２】

(1)　平行四辺形 ABCD が与えられている。この中に最大面積の三角形 △PQR が入っている。 △PQR の位置について，次のことを証明せよ。

　(イ)　頂点 P，Q，R は平行四辺形 ABCD の周上にある。

　(ロ)　△PQR の少なくとも 1 辺は，平行四辺形 ABCD の 1 辺と一致する。

(2)　面積が 1 の三角形は，面積が 2 より小さい平行四辺形の中には入らないことを証明せよ。

＜ ’66 京都大 ＞

【戦略】

(1)　**背理法で仕留めていきたいと思います。**

要するに，「面積が大きくできちゃうから矛盾」と結びたいということです。

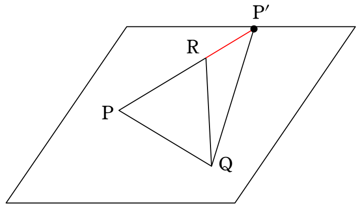
(2)　**(1) の結論から，この三角形 △PQR の面積 S，平行四辺形 ABCD の面積 T について**

$$S \leqq \frac{1}{2}T$$

であることが言えます。

【解答】

(1)　(イ)　頂点 P が平行四辺形の周上にないとすると



PR の延長上かつ平行四辺形の辺上の点 P′ を考えることで

$$\triangle PQR < \triangle PQP'$$

となるため，△PQR が与えられた平行四辺形に含まれる最大面積の三角形であるという条件に反する。

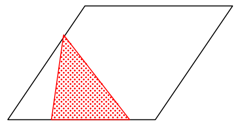
ゆえに，P は平行四辺形 ABCD の辺上にある。

残る 2 点についても同様である。

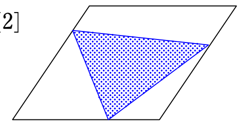
(ロ)　△PQR のどの辺も平行四辺形の辺に一致しないとする。

このとき，(イ) で示したことから次のケースが考えられる。

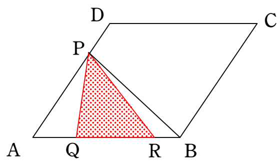
[1]



[2]

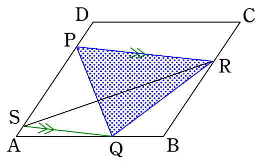


[1] のとき



△PQR＜△PAB で，△PQR が与えられた平行四辺形に含まれる最大面積の三角形であるという条件に反する。

[2] のとき



左図において PR∥QS となるように平行四辺形の辺上に S をとる。

△PQR＝△RPS＜△RDA

で，△PQR が与えられた平行四辺形に含まれる最大面積の三角形であるという条件に反する。

以上から，△PQR の少なくとも 1 辺は，平行四辺形 ABCD の 1 辺と一致する。

(2)　(1) より，平行四辺形に入っている三角形の面積は，その平行四辺形の面積の $\frac{1}{2}$ を超えないため，面積が 1 の三角形は面積 2 以下の平行四辺形の中には入らない。

【総括】

等積変形が結構大きく効いてきます。

ダラダラ記述するのも避けたいですが，最低限説明すべき部分はさぼらずに記述しましょう。