面積 S の三角形の中にある長方形の面積を T とするとき，

$$T \leqq \frac{S}{2}$$

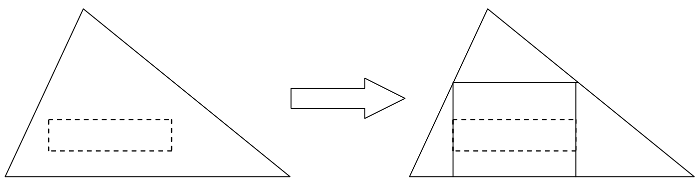
となることを証明せよ。

＜ ’82 愛知教育大 ＞

【戦略】

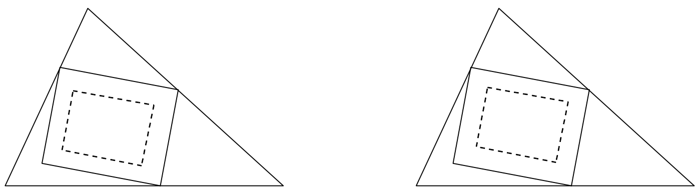
最善を尽くしても $\dfrac{S}{2}$ 以下であるという路線で行きたいと思います。

T を大きくしようと最善を尽くした場合



(i)

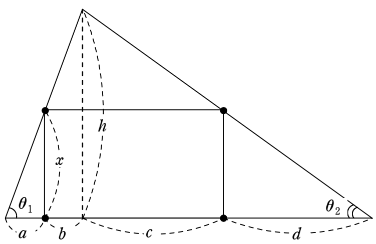
と膨らませた場合と



(ii)

というように膨らませた場合とが考えられます。

前者の場合，



と設定し，$T=x(b+c)$ と立式します。

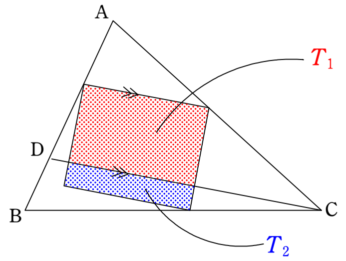
$\dfrac{S}{2}-T \geqq 0$ であることを目指せばよく

$$\frac{S}{2}-T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+b+c+d)h-x(b+c)$$

を計算していきます。

これらは無関係な文字たちではなく，相似の関係 (あるいは $\tan\theta_1$ や $\tan\theta_2$) に注目し，$\dfrac{x}{h}=\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{d}{c+d}$ という関係式があり，それを駆使しながら，$\dfrac{S}{2}-T$ の計算を進めていきます。

後者の場合



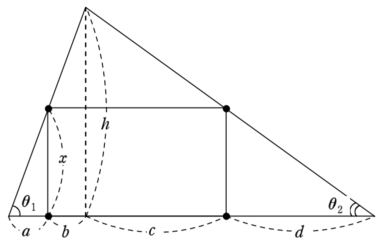
と分割することで (i) のケースに帰着できます。

【解答】

T を大きくしようと思うと，長方形の頂点の少なくとも 1 つが三角形の辺上にあるようにするのが最善である。

この場合，以下の (i)，(ii) の場合がある。

(i)



というように，長方形の 4 頂点のうち

$$\begin{cases}\text{2 頂点が 1 つの辺上}\\ \text{残りの 2 点が他の辺上に 1 点ずつ}\end{cases}$$

という場合

$$\tan\theta_1=\frac{x}{a}=\frac{h}{a+b}，\quad \tan\theta_2=\frac{x}{d}=\frac{h}{c+d}$$

これより，$\dfrac{x}{h}=\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{d}{c+d}$

ここで，$\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{d}{c+d}=k$ とおくと $\begin{cases} a+b=\dfrac{a}{k} \\ c+d=\dfrac{d}{k}\end{cases}$

よって，$\dfrac{a+d}{a+b+c+d}=\dfrac{a+d}{\dfrac{a}{k}+\dfrac{d}{k}}=k$

つまり，$\dfrac{x}{h}=\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{d}{c+d}=\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$

ゆえに，$x=\dfrac{(a+d)h}{a+b+c+d}$

これより，

$$\begin{aligned}T&=x(b+c)\\&=\frac{(a+d)(b+c)h}{a+b+c+d}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{S}{2}-T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+b+c+d)h-\frac{(a+d)(b+c)h}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)h}{4}-\frac{(a+d)(b+c)h}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2h-4(a+d)(b+c)h}{4(a+b+c+d)}$$

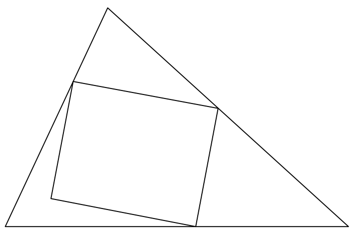
$$=\frac{h}{4}\cdot\frac{(a+b+c+d)^2-4(a+d)(b+c)}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{h}{4}\cdot\frac{(P+Q)^2-4PQ}{a+b+c+d}\quad(P=a+b,\ Q=c+d\ \text{とおいた})$$

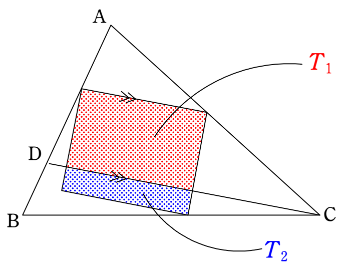
$$=\frac{h}{4}\cdot\frac{(P-Q)^2}{a+b+c+d}$$

$$\geqq 0$$

(ii)

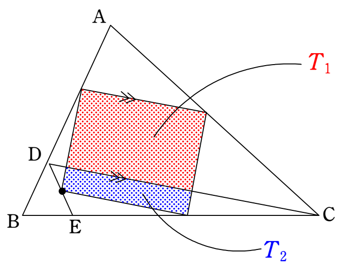


のように，長方形の頂点のうち 3 頂点が三角形の三辺に 1 つずつあるとき



と分けると，(i) より，$T_1\leqq\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ADC}$ …①

一方



と E をとると

$$T_2\leqq\frac{1}{2}\triangle\mathrm{DEC}\ \cdots②$$

①，② より，$T_1+T_2\leqq\frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ADC}+\triangle\mathrm{DEC})$

$$<\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$$

ゆえに，$T<\frac{1}{2}S$

以上から，$T\leqq\frac{1}{2}S$ が成立する。

【総括】

最善を尽くしても $\frac{S}{2}$ には負けるという路線で考えますが，

最善を尽くした場合，どんなケースとなるか

についてをとらえていきましょう。

幾何の路線であるため，見えるか見えないかが決め手となってきてしまうのは否めません。

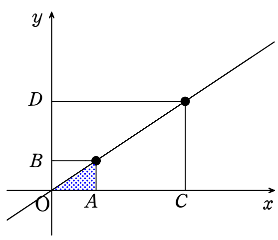
なお，解答中で用いた

$$\frac{a}{a+b}=\frac{d}{c+d}\ \text{であるならば，}\ \frac{a}{a+b}=\frac{d}{c+d}=\frac{a+d}{a+b+c+d}$$

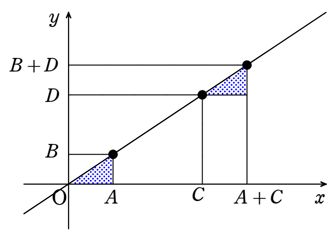
は，一般的に

$$\frac{B}{A}=\frac{D}{C}\ \text{ならば，}\ \frac{B}{A}=\frac{D}{C}=\frac{B+D}{A+C}$$

という形でまとめられる「加比の理」という有名事実です。



ならば



というように，比を傾きと捉えると直感的にも当然の原理だと言えます。