三角形と長方形の面積に関する論証

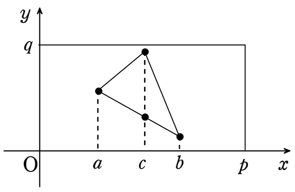
　長方形内に置かれた三角形の面積は，もとの長方形の面積の $\frac{1}{2}$ を超えないことを示せ。

＜ '94 名古屋大 ＞

【戦略】

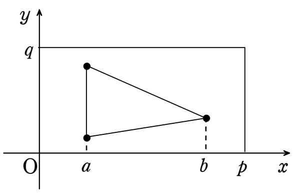
座標を設定し，面積を数式化することである程度明確にします。

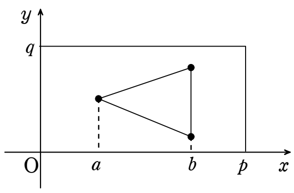
ひとまず構図としてどのように場合分けするかですが



のような一般的なケースがあり

こうならないような





という特殊なケースがあります。

結果的に一つにまとめるのも手ですが，場合分けして考えても差し支えないでしょう。

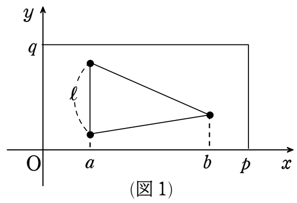
【解答】

長方形の 4 頂点を

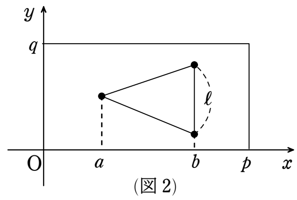
$$(0,\ 0),\ (p,\ 0),\ (p,\ q),\ (0,\ q) \quad （ただし，p>0,\ q>0）$$

と設定しても一般性を失わない。

(i)



(図 1)



(図 2)

のように，三角形の 3 頂点の x 座標の値が 2 種類のとき

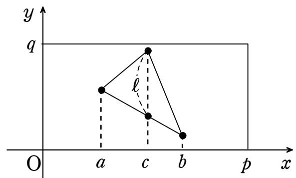
(図 1)，(図 2) のように x 座標 a，b $(a \leqq b)$ を定めると

$$0<b-a \leqq p$$

一方，y 軸に平行な辺の長さを ℓ とすると，$0<\ell \leqq q$

よって，この三角形の面積 S について，$S=\frac{1}{2}(b-a)\ell \leqq \frac{1}{2}pq$

(ii)



(図 3)

のように三角形の 3 頂点の x 座標の値が 3 種類のとき

(図 3) のように x 座標 a，b，c，ℓ を定めると

$$\begin{cases} 0 \leqq a<c<b \leqq p \\ 0<\ell \leqq q \end{cases}$$

より，$\begin{cases} 0<b-a \leqq p \\ 0<\ell \leqq q \end{cases}$ …①

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\ell(c-a)+\frac{1}{2}\ell(b-c) \\ &= \frac{1}{2}\ell\{(c-a)+(b-c)\} \\ &= \frac{1}{2}\ell(b-a) \\ &\leqq \frac{1}{2}pq \quad (\because ①) \end{aligned}$$

以上から，長方形内に置かれた三角形の面積は，もとの長方形の面積の $\frac{1}{2}$ を超えない。

【総括】

当たり前のような主張ですが，証明となると色々ウルサイ問題です。

分類するにしても，何かを見落としていないかで神経がすり減るでしょう。

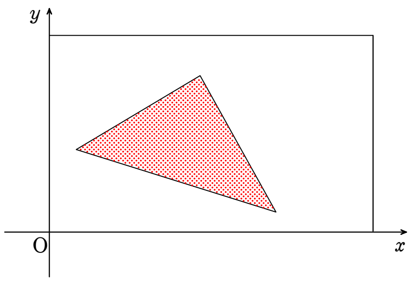
この三角形を「大きくしよう大きくしよう」と思うと

3 頂点が長方形の辺上に設定する

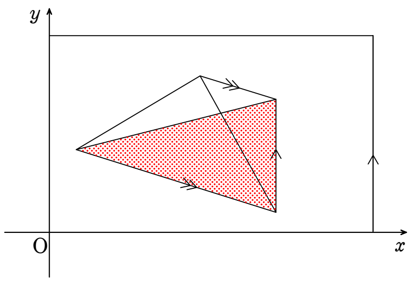
のが最善であることは直感的には分かりますが，それをどこまで認めてよいのかが難しい判断でしょう。

（証明問題という趣旨からすれば，なるべくなら説明を付しておきたいところです。）

なお



という (ii) のケースですが，



と，等積変形をすることで，(i) のケースに帰着することもできます。

ただ，この路線の場合でも、

長方形の枠をはみ出さずに平行線を引いて等積変形できるかどうか

ということについて、不備なく論じきるのは骨が折れるので別解とはしませんでしたが，これできちんと論じきれるという自信があれば構いません。

（ただそこまでする労力があれば【解答】のように素直に場合分けしてしまった方が早いでしょう。）