４次方程式の解法

4次方程式 $x^4-20x^2-8\sqrt{2}x+32=0$ …… $(*)$ のある解を見つけたい。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ は区間 $(4,\ 5)$ に解をもつことを示せ。

(2) (1) での解をオイラー (Leonhard Euler) の方法で求めよう。

p, q, r を正の実数として $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ $(p,\ q,\ r>0)$ とおく。まず補助変数 f, g, h

$$f=p+q+r,\quad g=pq+pr+qr,\quad h=pqr$$

を導入する。x^2, x^4 を計算して

$$x^4-Ax^2-Bx-C=0 \quad \cdots\cdots (**)$$

としたとき，A, B, C を f, g, h を用いて表せ。

次に $(*)$ と $(**)$ が同じ式と仮定して f, g, h を求めよ。

(3) 等式 $(X-p)(X-q)(X-r)=X^3-fX^2+gX-h$ と (2) で得られた f, g, h を用いて3次方程式 $X^3-fX^2+gX-h=0$ の3つの解 p, q, r を求めよ。

(4) 方程式 $(*)$ の解 $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ を等式

$$\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}=(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2 \quad (\alpha,\ \beta>0)$$

を用いて簡略化し，それが区間 $(4,\ 5)$ にあることを示せ。

＜ ’08 横浜市立大 ＞